GEODEZINIS ŽEMĖLAPIŲ PAGRINDAS

Herausgegeben von der Kartographischen Abtheilung der Königl. Preuss. Landesaufnahme 1898. Auflagedruck 1915.

161. Grodno.

Kaiserl. Russisches Gouvernement Suwałki.

Kaiserl. Russisches Gouvernement Wilna.

" " " Grodno.

Maßstab 1:200000 der natürl. Länge.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 Kilometer. 0 1/4 1/2 3/4 1 geogr. Meile = 7420 ₊₊ Meter.

Die Höhen sind in Metern angegeben.

Geodezija kartografijai teikia labai svarbius duomenis, pirmiausiai apie matematinius kartografuojamų kūnų formos modelius. Kūnų formos ir dydžio parametrai apskaičiuoti iš paralelių lankų ilgį, meridianų lankų ilgis, kartografinio tinklo trapecijų plotus bei atlikti būtinus skaičiavimus, reikalingus kartografinių projekcijų konstravimui ir žemėlapių kūrimui. Tam dažniausiai naudojama geodezinė koordinačių sistema. Svarbų vaidmenį kartografinių projekcijų kūrime atlieka geodezinio pagrindo taškų tinklas, kurio padėtis vietovėje yra tiksliai fiksuota. Remiantis geodeziniais tinklais sudaromi topografiniai žemėlapiai. Savo ruožtu topografinių žemėlapių pagrindu kuriami gausūs teminiai žemėlapiai.

Kartografuojamų dangaus kūnų figūros, išskyrus asteroidus, kometų branduolius ir planetų palydovus dažniausiai aproksimuojamos į matematiškai aprašomas geometrines figūras. Dažniausiai tokiomis figūromis yra rutuliai ar elipsoidai. Tokio kūno paviršius yra vadinamas santykiniu ar referenciniu paviršiumi. Būtent referencinis paviršius, naudojant kartografinę projekciją yra projektuojamas į plokštumą.

Triašis elipsoidas kartografavimui naudojamas retai, kadangi jo parametrų skaičiavimai yra labai sudėtingi ir reikalaujantys labai didelių laiko sąnaudų. Triašiai elipsoidai yra naudojami tik kai kurių planetų palydovams kartografuoti, kurių reali forma artima triašiam elipsoidui. Toks yra Marso palydovas Fobas. Labai sudėtingos formos dangaus kūnų kartografavimui, pavyzdžiui asteroidų, naudojami tiesioginiai realaus paviršiaus vizualizavimo metodai – 3 D variantai.

Taškų padėtis kartografuojamajame modelyje yra fiksuojami geografinėmis koordinatėmis: geografine platuma ir ilguma. Platumos matuojamos nuo 0 iki + 90º (šiaurės pusrutulyje) ir nuo 0 iki – 90º (pietų pusrutulyje). Ilguma matuojama nuo 0 (pradinis meridianas) iki + 180º (rytų kryptimi) ir nuo 0 iki – 180º (vakarų kryptimi). Kai kuriais atvejais ilguma matuojama nuo 0 iki + 360º (rytų kryptimi) arba nuo 0 iki – 360º (vakarų kryptimi). Tarptautinė astronomų sąjunga (IAU) rekomenduoja ilgumos matavimus vykdyti priešinga dangaus kūno sukimosi kryptimi.

Naudojant rutulį matuojama sferinė platuma ir ilguma, o naudojant elipsoidą – elipsoidinė platuma ir ilguma. Elipsoidinės koordinatės skirstomos į geocentrines (susietas su elipsoido centru) ir geodezines (susietas su normale, išvesta konkrečiame elipsoido taške). Dažniausiai taikomos geodezinės koordinatės, kurios dar vadinamos pagrindinėmis. Ypatingais atvejais gali būti taikomos ir kitos koordinačių sistemos.

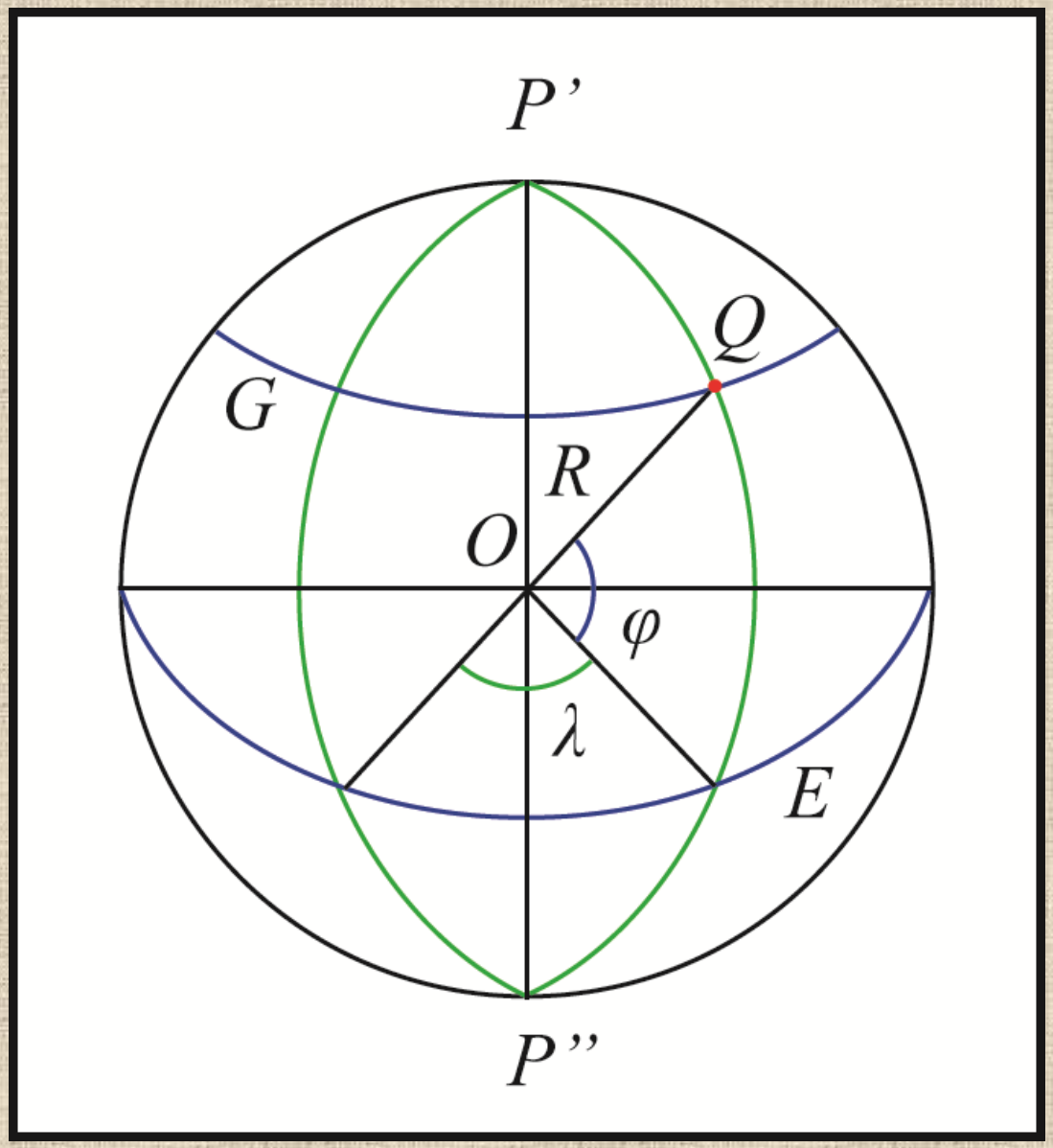
Kartografuojamų kūnų rutulio modelis

Kai kurie kartografuojami kūnai gali būti aproksimuoti į rutulį (sutapatinti su rutuliu). Pavyzdžiui, sudarius Žemės gaublį, kuriuo skersmuo siektų 1 metrą, jo polinis spindulys būtų tik 3,4 mm trumpesnis už ekvatorinį spindulį. Kitas svarbus rodiklis – paviršiaus nelygumai. Daugelio dangaus kūnų paviršiaus nelygumai yra nežymūs, lyginant su dangaus kūno skersmeniu. Pavyzdžiui, sudarius Žemės gaublį, kuriuo skersmuo siektų 1 metrą, tai Marijanų duburys būtų išreikštas 0,9 mm gylio įdubimu, o Everesto (Džmolungmos) kalnas būtų išreikštas 0,7 mm iškilimu.

Rutulio formą ir jo dydį nusako rutulio spindulys (1 lentelė).

1 lentelė. Saulės sistemos planetų spinduliai.

Eil. Nr.	Planeta	Rutulio spindulys R, km	Ekvatoriaus spindulys a, km	Polinis spindulys b, km
1	Merkurijus	2 139,7	2 439,7	2 439,7
2	Venera	6 051,8	6 051,8	6 051,8
3	Žemė	6 371,0	6 378,14	6 356,75
4	Marsas	3 390,0	3 397,0	3 375,0
5	Jupiteris	69 911,0	71 492,0	66 854,0
6	Saturnas	58 232,0	60 268,0	54 364,0
7	Uranas	25 362,0	25 559,0	24 973,0
8	Neptūnas	24 622,0	24 764,0	24 341,0
9	Plutonas	1 195,0	1 195,0	1 195,0



Geografinės Žemės rutulio koordinatės: φ – sferinė platuma, λ – sferinė ilguma, P′ ir P″ – geografiniai poliai, G – Grinvičo (pradinis, nulinis) meridianas, E – ekvatorius.

Rutulio skersmuo, sutapatinamas su Žemės ar kito dangaus kūno sukimosi ašimi yra vadinamas poline ašimi. Plokštuma, kuri statmenai kerta poline ašį ir eina per rutulio centrą yra vadinama ekvatorine plokštuma. Pagrindinės koordinatės, apibūdinančios taško padėtį rutulio paviršiuje yra sferinė platuma ir sferinė ilguma. Sferinė platuma – tai kampas, kurį sudaro normalė su ekvatorine plokštuma. Normalė – tai linija, einanti nuo norimo taško į rutulio centrą. Kadangi rutulio normalė yra lygi rutulio spinduliui, tai geografinę platumą galima apibūdinti kaip vidinį kampą tarp spindulio nukreipto į norimą tašką ir ekvatorinės plokštumos.

Ekvatorinė plokštuma, susikirsdama su rutulio paviršiumi brėžia ekvatoriaus liniją. Ekvatoriui lygiagrečių plokštumų sistema rutulio paviršiuje brėžia paraleles (lygiagretes). Plokštuma, statmena ekvatorinei plokštumai ir einanti per polinę ašį vadinama meridianine (dienovidžio) plokštuma. Dvi susikertančios meridianinės plokštumos, kurių viena yra pradinio (Grinvičo) meridiano plokštuma sudaro sferinės ilgumos kampą. Paralelių ir meridianų visuma sudaro geografinį (kartografinį) tinklą.

Sferos paviršiuje paralelės sudaro nevienodo dydžio apskritimus. Apskritimo spindulys priklauso nuo geografinės platumos:

$$r = R \times \cos\varphi$$

Paralelės ilgis tarp dviejų geografinės ilgumos taškų yra lygus:

$$s = (\lambda_2 - \lambda_1)$$

Ilgumos skirtumai dažnai išreiškiami radianais.

Meridianai taip pat yra apskritimai (jų dalys), kurių skersmuo yra lygus rutulio skersmeniui *R*. Meridiano lanko *S*, esančio tarp dviejų paralelių ilgis nustatomas pagal formulę:

$$S = R \times \varphi$$

Matematinėje kartografijoje, kuriant lygiatarpes projekcijas, yra naudojamas sferinės trapecijos plotas *P*. Ši trapecija rutulio paviršiuje yra apribota ekvatoriaus ir atitinkamos geografinės platumos paralelės ir dviejų meridianų, kurių kampinis skirtumas lygus 1 radianui (~57,3º). Jos plotas yra apskaičiuojamas pagal formulę:

$$P = R^2 \times sin\varphi$$

Rutulio modelis (gaublys) yra gana paprastas, todėl plačiai naudojamas. Tokį aproksimuotą kūną dažniausiai naudoja sudarant smulkaus mastelio žemėlapius. Rutulys (gaublys) dažnai naudojamas kaip tarpinis kūnas, į kurio paviršių projektuoja elipsoido paviršių. Tai taip vadinamas dvigubas projektavimas. Rutulio paviršius dažnai naudojamas kartografuojant ir sudėtingos formos dangaus kūnus. Šiuo atveju rutulys „talpinamas“ sudėtingos formos modelio viduje ir į rutulio paviršių perkeliami modeliuojamo kūno santykiniai aukščiai.

Kartografuojamų kūnų sferiniai modeliai

Daug tikslesniu nei rutulys apie savo ašį besisukančio kūno modeliu yra sferoidas. Tai figūra, kurią įgauna kūnas, veikiamas vidinės traukos ir išorinės sukimosi jėgos. Paprasčiausia sferoido forma – sukimosi elipsoidas, turintis nežymų suspaudimą poliarinėse srityse. Sukimosi elipsoidas – tai geometrinis kūnas, kuris susiformuoja elipsei sukantis apie trumpąją ašį.

Rutulį apibūdina tik vienas rodiklis – spindulys. Elipsoido formą apibūdina du rodikliai. Pagrindiniu yra didžioji elipsoido ekvatorinė pusašė *a*. Antruoju rodikliu gali būti:

- **Poliarinis paplokštumas α**
- **Pirmasis e' arba antrasis e'' ekscentrisitetai.**
- **Mažoji pusašė *b*.**

Visi minėti rodikliai yra tarpusavyje susiję:

$$\alpha = \frac{(a-b)}{a}$$

$$\alpha = 1 - \sqrt{(1-e')^2}$$

$$(e')^2 = \alpha \times (2-\alpha)$$

$$(e')^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

$$(e'')^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

$$b = a \times (1-\alpha) = a\sqrt{1-(e')^2}$$

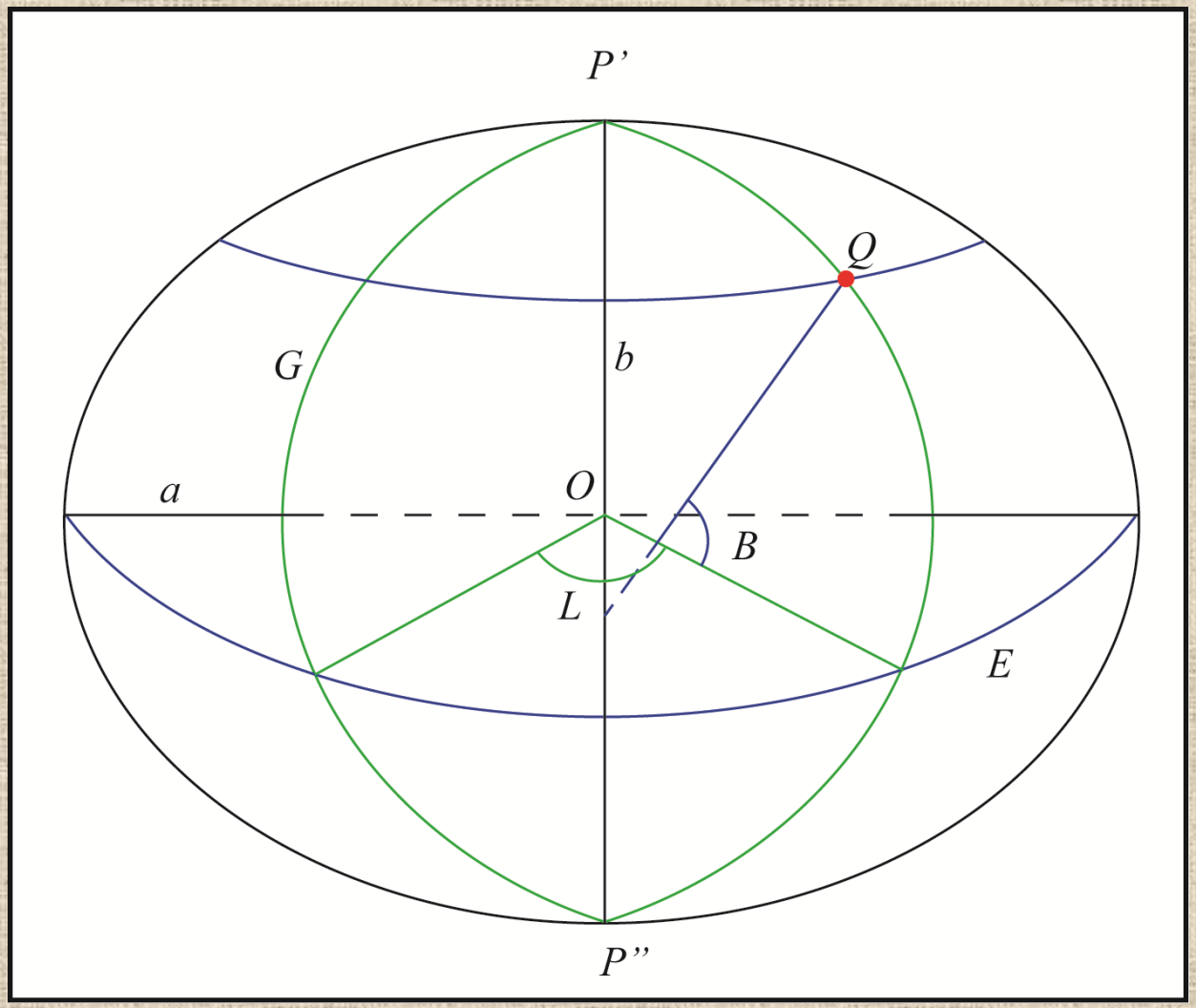
Sukimosi elipsoidų parametrai Saulės sistemos planetoms pateikiami elipsoidų lentelėje, o plačiausiai naudojami sukimosi elipsoidai Žemei – 2 lentelėje.

2 lentelė. Plačiausiai naudojami Žemės sukimosi elipsoidai.

Eil. Nr.	Elipsoidas	Sukūrimo metai	Didžioji pusašė, m	Paplokštumas α
1	Delambro	1800	6 375 653	1/334
2	Valbeko	1819	6 376 896	1/303
3	Eirio	1830	6 377 563	1/299
4	Everesto	1830	6 377 276	1/301
5	Beselio	1841	6 377 397	1/299
6	Klarko	1866	6 378 206	1/294
7	Klarko	1866	6 378 249	1/293
8	Heifordo	1909	6 378 388	1/297
9	Krasovskio	1940	6 378 245	1/298
10	Australijos	1965	6 378 160	1/298
11	GRS – 67	1967	6 378 160	1/298
12	WGS – 72	1972	6 378 135	1/298
13	GRS – 80	1980	6 378 137	1/298
14	WGS – 84	1984	6 378 137	1/298
15	PZ - 90	1990	6 378 137	1/298

XIX amžiaus elipsoidai leido sukurti tikslius globalinius žemėlapius. Delambro elipsoidas pasitarnavo kuriant pagrindinį SI ilgio matą – metrą (1:20 000 000 Paryžiaus meridiano dalis). Valbeko elipsoidas naudotas Rusijos imperijoje, Eirio – Didžiojoje Britanijoje, Everesto – Pietų Azijoje, Beselio – daugelyje Europos ir Azijos šalių, Klarko – Azijoje, Afrikoje, Centrinėje Amerikoje, Krasovskio – buvusioje TSRS. Heifordo elipsoidas 1924 metais pripažintas tarptautiniu ir naudotas visame pasaulyje, net ir Antarktidoje. Rusija nuo 1990 metų naudoja PZ – 90 elipsoidą (Žemės parametrai).

XX amžiaus septintame – aštuntame dešimtmečiuose elipsoido parametrų skaičiavimams pradėti naudoti kosminių palydovų duomenys. Devintame dešimtmetyje sukurtų elipsoidų parametrai labai tikslūs ir tinkami praktiškai visoms pasaulio šalims. Tokie plačiausiai naudojami elipsoidai yra GRS – 80 bei WGS 84. Jais remiantis sukurta globalinė pozicionavimo sistemas – GPS.



Geodezinės elipsoido koordinatės: a – ilgoji elipsoido pusašė, b – trumpoji elipsoido pusašė, B – geodezinė platuma, L – geodezinė ilguma, P′ ir P″ - geografiniai ašigaliai, G – Grinvičo (pradinis) meridianas, E – ekvatorius.

Elipsoido taškų padėtis yra nusakoma geodezine platuma ir geodezine ilguma. Geodezinė platuma *B* – tai kampas, kuri sudaro normalė, nutiesta iš norimo taško į ekvatoriaus plokštumą. Normalė – elipsoido paviršiaus liestinei statmena linija. Geodezinė ilguma *L* – kampas, kuri sudaro dvi besikertančios meridianinės plokštumos. Viena jų yra pradinio meridiano plokštuma – kita – einanti per norimą tašką. Skaidant elipsoidą plokštumomis, einančiomis per polinę ašį, gaunami meridianai, o skaidant plokštumomis, lygiagrečiomis ekvatorinei plokštumai – paralelės. Ekvatoriaus plokštuma ir ekvatorius gaunami elipsoidą kertant plokštuma, statmena polinei ašiai ir einančiai per jos centrą.

Paralelių ir meridianų visumas sudaro elipsoido paviršiuje geografinį tinklą.

Skirtingai nei rutulys, elipsoidas turi kelis spindulius. Svarbiausi sukimosi elipsoido spinduliai yra:

M – meridiano kreivumo spindulys.

N – pirmojo vertikalo kreivumo spindulys. Tai linija, gaunama kertant elipsoidą plokštuma, einančia per norimo taško normalią ir statmena meridiano plokštumai.

R – vidutinis spindulys linijų, kurios susidaro kertant elipsoidą įvairiomis plokštumomis einančiomis per norimo taško normalę.

R – paralelės spindulys.

Šie rodikliai skaičiuojami taikant atitinkamas formules:

$$M = \frac{a \times (1 - e^2)}{(1 - e^2 \times sin^2 B)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad N = \frac{a}{\sqrt{1} - e^2 \times sin^2 B} \quad ;$$

$$R = \sqrt{M \times N} \quad ; \qquad r = N \times cosB \quad ;$$

Meridiano spindulys naudojamas meridianų lankų ilgiui skaičiuoti bei nustatyti geografinei platumai, remiantis meridianų lankais.

Pirmojo vertikalo kreivumo spindulys reikalingas paralelių spinduliams bei vidutiniam spinduliui skaičiuoti. Ašigaliuose spinduliai M = N. Kitose platumose didžiausią spindulį turi dydis N, o mažiausią – M. Todėl meridiano ir pirmojo vertikalo spindulius vadina pagrindiniais kreivumo spinduliais.

Vidutinis kreivumo spindulys R yra lygus vidutinei geometrinei pagrindinių kreivumo spindulių reikšmei. Vidutinis spindulys naudojamas skaičiavimuose, būtinuose išskleidžiant elipsoido paviršių į plokštumą.

Paralelių ir meridianų lankai.

Sukimosi elipsoido paviršiuje paralelė yra apskritimas. Jos lanko ilgis (*s*) tarp dviejų ilgumos taškų L_1 ir L_2 yra lygus spindulio *r* ilgumos skirtumo išvestinei. Šis dydis išreiškiamas radianais:

$$s = r(L_2 - L_1)$$

Meridianas turi elipsės formą, todėl jo dydžio skaičiavimai yra sudėtingesni. Nuo ekvatoriaus iki fiksuotos paralelės B meridiano lanko ilgis skaičiuojamas per integralą:

$$S = \int_0^B M \times d \times B$$

Šį integralą sprendžia skaitmeniniu būdu arba išskaidant į pointegralinius dydžius.

Matematinėje kartografijoje lankų ilgių skaičiavimas yra susijęs su kartografinių projekcijų sudarymu ar jų transformacija. Krasovskio elipsoidui naudojama formulė:

$$S = 6367558,5\,B - \sin B \times \cos B\,(32005,6 + 134,6\sin^2 B)$$

Meridiano lanko ilgio skaičiavimo paklaidos neviršija 0,2 m. Ši formulė naudojami paralelių padėties nustatymui priartėjimo būdu. Daroma prielaida kad:

$$B = \beta \;; \qquad \beta = \frac{S}{6367558,5} \;;$$

Sreoidinės trapecijos plotų skaičiavimai. Sferoidinės trapecijos plotas, apribotas ekvatoriumi, paralele, kurios reikšmė B ir dviem meridianais, kurių ilgumos skirtumas lygus 1 radianui skaičiuojamas pagal vieną iš šių formulių:

$$P = \frac{b^2}{2}\left(\frac{\sin B}{1 - e^2 sin^2 B} + \frac{1}{2e'} ln \frac{1 + e' \times sinB}{1 - e' \times sinB}\right) \;;$$

$$P = b^2\left(sinB + \frac{3}{5}e^2 sin^3 B + \frac{3}{5}e^4 sin^5 B + \frac{4}{7}e^6 sin^7 B + \cdots\right)$$

Tiksliausią Žemės figūrą sukuria triašis elipsoidas. Tačiau kuriant Žemės formos modelį triašiu elipsoidu naudojamasi retai, kadangi Žemės kūno triašiškumas nėra ryškus, o skaičiavimo formulės yra labai sudėtingos.

Eliposoido keitimas rutuliu

Elipsoido kartografinio tinklo koordinačių skaičiavimas ir braižymas yra labai sudėtingas, todėl jeigu sudaromų žemėlapių tikslumas leidžia, elipsoido kūną stengiamasi pakeisti rutuliu. Tokie pakeitimai dažniausiai vykdomi sudarant smulkaus mastelio žemėlapius. Be to, matematinėje kartografijoje yra taikomas ir dvigubas projektavimas: elipsoido paviršius projektuojamas į rutulio paviršių, o rutulio paviršius naudojant atitinkamą projekciją – į plokštumą. Projektuojant elipsoiodo paviršių į rutulį pagrindinė problema kyla parenkant rutulio spindulį (*R*) bei pereinant nuo elipsoido platumos *B* ir ilgumos *L* koordinačių į rutulio koordinates. Projektavimo metu elipsoido ir rutulio kūnai sutapatinami.

Sutapatinimas vykdomas:

1. Sutapatinant abiejų kūnų centrus.

2. Sutapatinant abiejų kūnų sukimosi ašis (polines ašis).

3. Sutapatinant pradinių meridianų plokštumas.

Tokiu atveju sutampa elipsoiodo ir rutulio ekvatorinės plokštumos bei visų meridianų plokštumos. Labai svarbu, kad nepakinta ilgumos reikšmės abiejų kūnų paviršiuose:

$$\lambda = L$$

Transformuojamos tik geografinės platumos reikšmės. Tačiau ir jos ašigaliuose bei ekvatoriuje lieka vienodos (nepakitusios). Didžiausi platumų pokyčiai yra vidutinėse platumose.

Sferinių platumų reikšmės ir rutulio spindulio parinkimas priklauso nuo to, kokiu būdu elipsoido paviršius perkeliamas į rutulio paviršių. Yra keletas perkėlimo būdų:

1. **Sferinis vaizdavimas.**
2. **Lygiakampis vaizdavimas.**
3. **Lygiaplotis vaizdavimas.**
4. **Lygiatarpis vaizdavimas.**

Sferinis vaizdavimas. **Sferinio vaizdavimo atveju normalės atitinkamuose elipsoido ir rutulio paviršiaus taškuose yra lygiagrečios. Todėl sferinės (rutulio) ir geodezinės (elipsoido) platumos yra lygios:**

$$\varphi = B$$

Nedidelėms teritorijoms rutulio spindulys prilyginamas vidutiniam centrinio žemėlapio taško spinduliui *R*. Keičiant visą elipsoido kūną rutuliu, jo spindulys skaičiuojamas kaip aritmetinis trijų dydžių vidurkis:

1. Vidurkiniam rutulio spinduliui, gautam sudėjus tris elipsoido pusašes: dvi ekvatorines ir vieną polinę.

2. Rutulio, kurio paviršiaus plotas lygus elipsoido plotui, spinduliui.

3. Rutulio, kurio tūris lygus elipsoido tūriu, spinduliui.

Žemės kūnui toks vidurinis rutulio spindulys *R* = 6371 km. Toks rutulys savo trimis pusašėmis, paviršiaus plotu ir tūriu labai artimas Žemės elipsoidui. Tokio rutulio paviršiuje meridiano lanko tarp ekvatorius ir ašigalio ilgis yra 5,6 km (0,05%) ilgesnis nei elipsoido paviršiuje, o 90º ekvatoriaus lanko ilgis yra 11,2 km (0,1%) trumpesnis nei elipsoido paviršiuje. Tokių nesutapimų smulkaus mastelio žemėlapiuose grafiškai negalima pavaizduoti: nesutapimų reikšmės daug mažesnės, nei grafinio vaizdo tikslumas.

Lygiakampis vaizdavimas. **Meridianų ir paralelių kryptys nuo elipsoido paviršiaus į rutulio paviršių perkeliamos be iškraipymų. 1807 metais Karlo Brandano Molveidės (1774 – 1825) siūlymu rutulio spindulys prilyginamas didžiajai pusašei. Platumos reikšmės radianais skaičiuojamos pagal formulę:**

$$\varphi = B - \alpha \times sin2B + \beta sin4B$$

$$\alpha = \frac{e^2}{2} + \frac{31e^4}{180} + \ldots; \ \beta = \frac{17e^4}{360} \ldots;$$

Naudojant lygiakampį vaizdavimą gaunami labai maži iškraipymai. Pavyzdžiui, nuo Feodosijaus Krasovskio elipsoido perkėlus kartografinį tinklą į rutulio paviršių ir perskaičiavus į kampinius dydžius α = 692,234″, o β = 0,963 ″ Didžiausi iškraipymai yra ašigaliuose ir siekia iki 0,3 %. Didžiausi platumos iškraipymai yra ties 45 º paralele ir siekia 11′ 32,23″. Tai reiškia, kad rutulio paviršiuje 45º paralelė pasislenka palyginus su jos padėtimi elipsoido paviršiuje 21,4 km link ekvatoriaus.

Lygiaplotis vaizdavimas. **Objektų plotai rutulio paviršiuje yra lygus atitinkamų objektų plotams elipsoido paviršiuje. Platumos rutulio paviršiuje skaičiuojamos pagal formulę:**

$$\varphi = B - \alpha \times sin2B + \beta \times sin4B;$$

$$\alpha = \frac{e^2}{2} + \frac{31e^4}{180} + \ldots; \quad \beta = \frac{17e^4}{360} \ldots;$$

Kaip ir lygiakampio vaizdavimo atveju, lygiaplotis vaizdavimas duoda labai mažus iškraipymus. Pavyzdžiui, nuo Krasovskio elipsoido perkėlus kartografinį tinklą į rutulio paviršių ir perskaičiavus į kampinius dydžius α = 461,797″, o β = 0,436″. Rutulio spindulys skaičiuojamas taikant elipsoido ir rutulio paviršiaus plotų priklausomybę:.

$$R = a(1 - \frac{e^2}{6} - \frac{17e^4}{360} - \frac{201e^6}{9072} \ldots\ldots)$$

Krasovskio elipsoidui tokio rutulio spindulys lygus 6 731 116 m. Maksimalūs ilgių ir kampų iškraipymai yra ekvatoriaus srityje ir siekia 0,1 % bei 3,8 ′. Didžiausi platumų nesutapimai yra ties 45° paralele ir siekia 7′ 43,8″. Ši paralelė rutulio paviršiuje pasistūmėja link ekvatoriaus 14,3 km.

Lygiatarpis vaizdavimas. **Elipsoido paviršius į rutulį gali būti projektuojamas dviem būdais: išsaugojant elipsoido meridianų ilgius arba išsaugojant elipsoido paralelių ilgius. Jeigu nekeičiami meridianų ilgiai *S*, tai rutulio paviršiaus platumos *φ* ir rutulio spindulys *R* skaičiuojamas pagal formulę:**

$$\varphi = \frac{S}{R}$$

$$R = \frac{a}{1+n}\left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} + \cdots\right); \qquad n = \frac{a-b}{a+b}$$

Krasovskio elipsoido atveju *R* = 6 367 558,5 m.

Jeigu elipsoidas projektuojamas į rutulio paviršių išlaikant elipsoido paralelių ilgį, tai rutulio spindulys *R* prilyginamas didžiajai elipsoido pusašei *a*, tuomet rutulio paviršiaus paralelės skaičiuojamos pagal formulę:

$$tg\,\varphi = \sqrt{1} - e^2 \times tgB$$

Paralelių pasislinkimas gali tarnauti kriterijumi, parodančiu, kokių mastelių atveju būtina perskaičiuoti platumas, o kokiais atvejais to daryti nereikia. Pavyzdžiui, didžiausi paralelių pasislinkimai būna sferinio ir lygiakampio projektavimo atvejais. Žemės atveju paralelių maksimalus pasislinkimas siekia 21,4 km, kas 1:20 000 000 mastelio žemėlapyje sudaro 1,07 mm. Toks mažas dydis nereikalauja perskaičiuoti ir taisyti paralelių padėčių.

Globaliniuose, vandenynų ir žemynų smulkaus mastelio žemėlapiuos iškraipymai, atsirandantys dėl elipsoido keitimo rutuliu yra labai nedideli, lyginant su perėjimu nuo sferinio paviršiaus apskritai į plokštumą. Pavyzdžiui teminiuose globaliniuose 1:15 000 000 mastelio žemėlapiuose ekvatorius sutrumpėja 0,1 % pakeitus elipsoidą rutuliu. Tačiau pereinant nuo sferinio paviršiaus į plokštumą iškraipymų dydžiai siekia 15,7 %.

Vaizdo perkėlimas nuo rutulio paviršiaus į rutulio paviršių

Kai kuriais atvejais kuriant kartografines projekcijas yra naudojamas pirminis rutulio paviršius, kurio vaizdas yra perkeliamas ant pagalbinio rutulio paviršiaus. Tokio pagalbinio rutulio naudojimo pavyzdžiu gali būti Edgaro Gilberto panaudota „dviejų pasaulių“ projekcija, kur vieno pusrutulio paviršiuje pavaizduotas visas žemės rutulys. Taikant lygiakampiškumo principą nuo rutulio paviršiaus į kito rutulio (realiai pusrutulio) paviršių perkeltas vaizdas. Perkeliant vaizdą platumos ir ilgumos reikšmės buvo skaičiuojamos remiantis tokiomis formulėmis:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{2}\ ;\ sin\varphi' = \frac{tg\varphi}{2}$$

kur φ' ir λ' platumos ir ilgumos reikšmės naujo rutulio paviršiuje.

Visas žemės paviršiaus vaizdas viename pusrutulių žemėlapyje

Polinės ir sferinės (rutulio) koordinatės

Rutulio paviršiuje be geografinių ašigalių, ekvatoriaus, geografinių paralelių ir meridianų tinklo gali būti patogu naudoti polinę koordinačių sistemą. Tam rutulio paviršiuje parenkamas taškas, kuris yra polinės koordinačių sistemos centras. Jis įvardijamas kaip sąlyginis polius (ašigalis). Didžiojo apskritimo lankas, kuris yra nutolęs nuo sąlyginio poliaus 90º, laikomas sąlyginiu ekvatoriumi. Remiantis sąlyginio poliaus ir sąlyginio ekvatoriaus padėtimi kuriamas naujas koordinačių tinklas. To tinklo linijos įvardijamos kaip sąlyginės (sutartinės) paralelės ir sąlyginiai meridianai.

Vaizdžiai viskas atrodo taip: ant rutulio yra nubrėžtas geografinis paralelių ir meridianų tinklas. Šį rutulį gaubia kitas skaidrus rutulys, kuris turi savo paralelių ir meridianų tinklą. Sukant skaidrų rutulį, jo paralelių ir meridianų tinklas keis savo padėtį pirminio rutulio geografinių paralelių ir meridianų tinklo atžvilgiu. Tai reiškia, kad taško padėtį galima apibrėžti taikant naują koordinačių sistemą. Galima nustatyti sąlyginę platumą ir sąlyginę ilgumą. Šie dydžiai nustatomi sąlyginėje koordinačių sistemoje.

Vietoje sąlyginės paralelės gali būti taikomas papildomas kampas, kurio reikšmės trūksta iki 90º, kuris dar vadinamas zenintiniu nuotoliu (Z). Jeigu sąlyginė platuma matuojama tarp sąlyginio ekvatoriaus ir spindulio, nukreipto į norimą tašką, tai zenitinis nuotolis yra lygus kampui tarp spindulio ir krypties į poliarinės koordinačių sistemos ašigalį. Todėl platuma ir zenitinis nuotolis papildo vienas kitą iki 90º reikšmės:

$$\varphi + Z = \frac{\pi}{2}$$

Kiekviena sąlyginė paralelė atitinka pastovų zenitinio nuotolio dydį. Ji yra vadinama almukantaratu – vienodo zenitinio nuotolio linija. Kiekvienas sąlyginis meridianas prasideda sąlyginiame poliuje ir turi apibrėžtą azimutą (*a*). Jis vadinamas vertikalu. Šį azimutą galima traktuoti kaip sąlyginę ilgumą.

Almukantaratų ir vertikalų tinklą galima suvokti kaip pasuktą geografinių paralelių ir meridianų tinklą, kurio geografinis polius perkeltas į sąlyginę sferinę polinę koordinačių sistemą.

Priklausomai nuo sąlyginio poliaus platuminės padėties skiriamos kelios koordinačių sistemos:

1. Normali polinė sferinė koordinačių sistema, kurioje sąlyginio poliaus padėtis sutampa su realaus geografinio poliaus padėtimi.

2. Skersinė polinė sferinė koordinačių sistema, kurioje sąlyginis polius yra ant realaus geografinio ekvatoriaus.

3. Įstriža polinė sferinė koordinačių sistema, kurioje sąlyginis polius yra tarp realaus geografinio poliaus ir realaus ekvatoriaus.

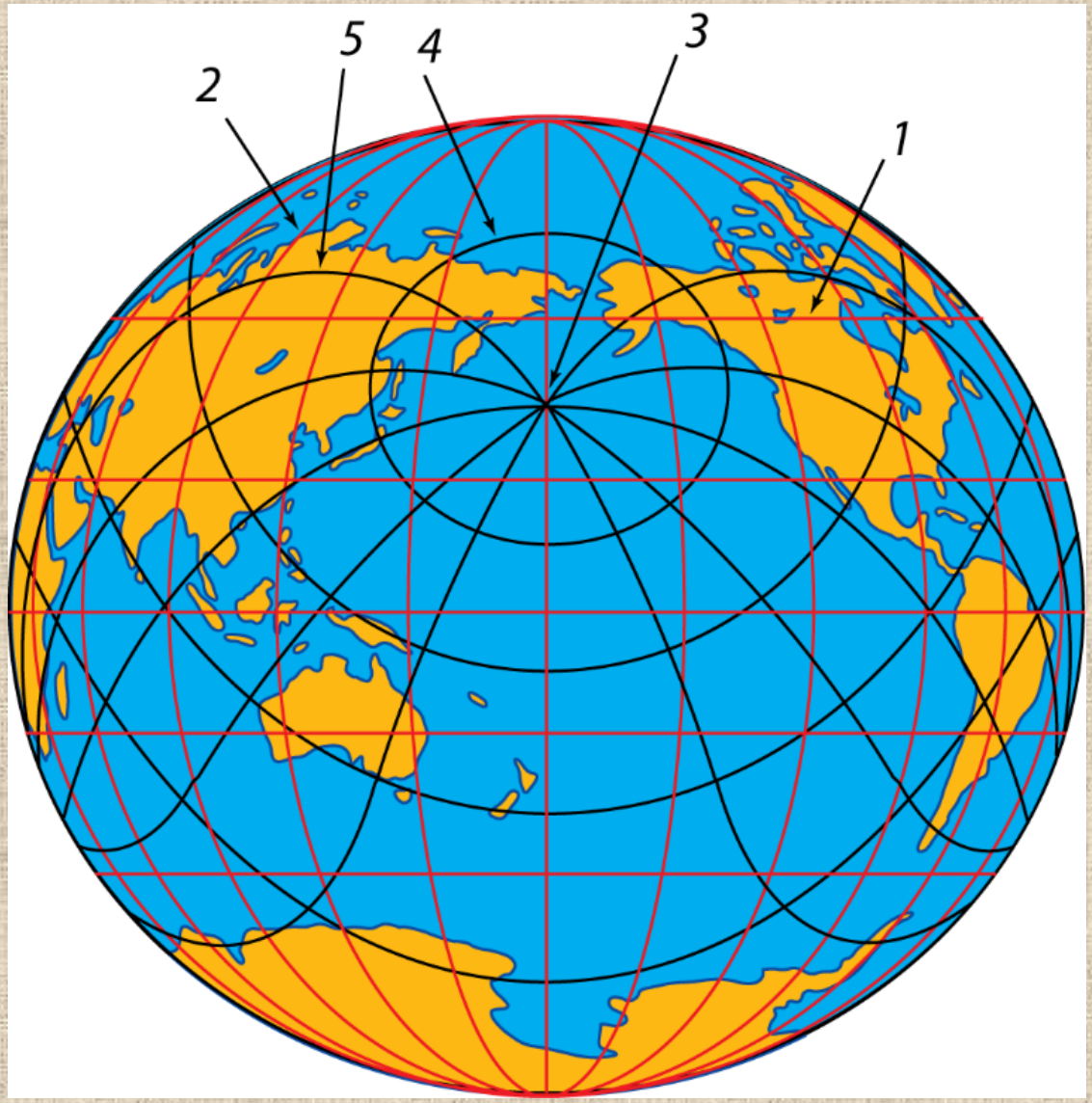
Priklausomai nuo to kartografinės projekcijos vadinamos normaliomis (normalinėmis), skersinėmis ir įstrižomis.

Norimo taško sąlyginės platumos ir zenitinio nuotolio Z skaičiavimai atliekami naudojant realias geografinės platumos ir ilgumos reikšmes, kurios nustatomos nuo vidurinio meridiano, naudojant tokias formules:

$$\sin\varphi' = sin\varphi_0 \times \sin\varphi + cos\,\varphi_0 \times cos\varphi \times \cos\lambda$$

$$Z = \frac{\pi}{2 - \varphi'}$$

Kur φ_0 – sąlyginio poliaus (ašigalio) platuma.



Geografinis ir pagalbinis tinklai įstrižoje azimutinėje projekcijoje: 1 – paralelė, 2 – meridianas, 3 – papildomo tinklo ašigalis (φ = 45° šiaurės platumos, λ = 180° rytų ilgumos), 4 – almukantaratas, 5 - vertikalas

Sąlyginio meridiano azimutas skaičiuojamas pagal formulę:

$$tg\,a = \frac{cos\varphi \times sin\lambda}{cos\varphi_0 \times sin\varphi - sin\varphi_0 \times cos\varphi \times \cos\lambda}$$

Tam, kad tiksliai nustatyti azimutą, būtina atsiminti, kad skaitiklio ženklas atitinka *sin a* ženklą, o vardiklio ženklas – *cos a* ženklą. Todėl atliekant azimuto skaičiavimus būtina naudotis šiomis priklausomybėmis (3 lentelė).

3 lentelė. Azimutų skaičiavimo formulės.

Ženklas		Azimutas
skaitiklio	vardiklio	
+	+	arctg a
+	-	π + arctg a
-	-	
-	+	2π +arctg a

Kartais tenka žemėlapyje pateikti ir sąlyginę koordinačių tinklų sistemą – sąlygines paraleles ir sąlyginius meridianus. Pavyzdžiui, svarbu matyti kaip atrodys paralelės ar meridianai, tuomet, kai geografinis polius pakeis savo vietą (paleogeografiniuose žemėlapiuose). Tuomet taikomos formulės, leidžiančios nustatyti taškų geografines platumas ir ilgumas, remiantis sąlyginėmis platumomis ir azimutais *a*.

Sukeitus geografinį ir sąlyginį polius vietomis, atitinkamai pasikeis realaus geografinio ir sąlyginio kartografinių tinklų vietos. Tai reiškia, kad almukantaratų ir vertikalų tinklo padėtį perims realaus kartografinio tinklo paralelių ir meridianų padėtis. Aukščiau pateiktose formulėse teks sukeisti vietomis reikšmes bei azimutą *a* ir geografinės ilgumos reikšmes.

Kai kuriose įstrižinėse projekcijose sąlyginis polius yra už geografinio poliaus, ant vidurinio meridiano tęsinio, tai yra paslinktas 180º.

Skaičiuojant (*Z*) ir azimutą a galima naudotis pateiktomis formulėmis. Tik teks pakeisti nario ženklus į priešingas reikšmes. Tokiu atveju azimutas *a* parodo sąlyginio poliaus kampą, esantį tarp krypčių į geografinį polių ir norimą tašką. Ji galima traktuoti kaip sąlyginio meridiano sąlyginę ilgumą.