VAIZDO IŠKRAIPYMAI KARTOGRAFINĖSE PROJEKCIJOSE

Iškraipymai kartografinėse projekcijose

Kartografinių projekcijų vaizdo iškreipimas – viena svarbiausių matematinės kartografijos teorinių dalių. Nei elipsoido, nei rutulio paviršiaus negalima išskleisti į plokštumą jų neiškraipant. Kai kurie elipsoido ar rutulio paviršiaus plotai bus ištempiami, kai kurie – suspaudžiami. Perkeliant sferinį paviršių į plokštumą bus iškraipomi atstumai, kampai, paviršių plotai ir jų formos. Tai reiškia, kad vaizdas plokštumoje neatitiks vaizdo sferiniame paviršiuje. Be to, visi iškraipymai plokštumoje (žemėlapyje) yra tarpusavyje susiję, o tai reiškia, kad vieno parametro iškraipymas įtakos ir kito parametro pokyčius.

Ypatingą ryšį turi kampų ir plotų iškraipymų sąsajos. Mažinant kampų iškraipymą didėja plotų iškraipymas ir atvirkščiai. Tai reiškia, kad projekcijose, kuriose neiškraipomi kampai, labai stipriai iškraipomi plotai, o projekcijose, kur neiškraipomi plotai, ženkliai iškraipomi kampai. Tai reiškia, kad sudarant smulkaus mastelio žemėlapius siekiama racionalios pusiausvyros tarp kampų ir plotų iškraipymo.

Kita vertus, kartografinėse projekcijose gali būti taškai ir linijos, kuriose vieno ar visų parametrų iškraipymų nėra. Tokie taškai ir linijos vadinami nulinių iškraipymų taškais ir linijomis.

Metriniai paviršiaus elementai

Kartografinių projekcijų savybės tiriamos lyginant tuo pačių metrinių elementų reikšmes: linijų ilgius, kampus, plotus. Palyginimui naudojamos diferencinės geometrijos lygtys. Tarkime, kad kartografinė projekcija aprašoma aproksimuotomis lygtimis:

$$x = f_1(\varphi, \lambda); \quad y = f_2(\varphi, \lambda);$$

Sferinio paviršiaus tašką, kurio koordinatės yra atitinka plokštumos taškas, kurio koordinatės *x* ir *y*. Sferiniame paviršiuje taško padėčiai pakitus labai nedideliu dydžiu plokštumoje šis pokytis bus *dx* ir *dy*. Jų reikšmės bus nustatomos pagal formules:

$$dx = x_\varphi \times d\varphi + x_\lambda \times d\lambda; \qquad dy = y_\varphi \times d\varphi + y_\lambda \times d\lambda;$$

kur $x_\varphi, x_\lambda, y_\varphi, y_\lambda$ **dalinės išvestinės.**

Remiantis šiais dydžiais yra skaičiuojami Gauso koeficientai:

$$e = x_\varphi^2 + y_\varphi^2 \qquad g = x_\lambda^2 + y_\lambda^2; \qquad f = x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda$$

$$h = x_\varphi y_\lambda - y_\varphi x_\lambda = \sqrt{eg - f^2}$$

Kur $e, g, f, h > 0$

Žinant Gauso koeficientus, galima skaičiuoti linijų ilgius, kampus ir plotus sferiniame paviršiuje ir plokštumoje. Jie lemia paviršių metriškumą.

Plokštumos paviršiuje elementarios atkarpos ilgis nustatomas naudojant priklausomybę:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

Darant prielaidą, kad $d\lambda = 0$, nustatomas meridiano lanko dl_m ilgis, o darant prielaidą, kad $d\varphi = 0$, nustatomas paralelės dl_n lanko ilgis.

Formulės, reikalingos rodikliams nustatyti pateikiamos 5 lentelėje.

5 lentelė. Plokštumoje esančių linijų atkarpų, kampų ir plotų analizės formulės

Rodiklis	Formulės
Elementarios atkarpos ilgis *dl*	$dl^2 = ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + gd\lambda^2$
Meridiano dl_m ir paralelės dl_n lankų ilgiai	$dl_m = \sqrt{ed\varphi};\ dl_n = \sqrt{gd\lambda}$
Kampas tarp teigiamų meridiano ir paralelės krypčių θ	$cos\theta = \frac{f}{\sqrt{eg}};\ \sin = \frac{h}{\sqrt{eg}};\ tg\theta = \frac{h}{f}$
Krypties azimutas α	$tg\ \alpha = \frac{h\frac{d\lambda}{d\varphi}}{e + f\frac{d\lambda}{d\varphi}}$
Elementarios trapecijos plotas, kurios kraštinės yra dl_m ir dl_n, o kampas tarp jų θ.	$dF = hd\varphi d\lambda$

Kampas tarp dviejų vektorių krypčių $dl_1 = \left(\frac{dx_1}{dy_1}\right); \quad dl_2 = \left(\frac{dx_2}{dy_2}\right);$

nustatomas pagal išvestinę: $$cos\beta = \frac{dl_1^T dl_2}{dl_1 dl_2}$$

Tarkime, kad linijos atkarpa dl_1 orientuota meridiano kryptimi, o atkarpa dl_2 paralelės kryptimi. Tuomet $d\lambda_1 = 0$ ir $d\varphi_2 = 0$. Kampas β šiame taške bus lygus kampui θ, kuris yra tarp teigiamų meridiano ir paralelės krypčių. Jeigu atkarpa dl_1 orientuota meridiano kryptimi, o atkarpa dl_2 laisva azimuto kryptimi. Tokiu atveju kampas $\beta = \alpha$ ir rodo krypties azimutą žemėlapyje.

Elementarios trapecijos dF plotas, kurios kraštinės yra dl_m ir dl_n, o kampas tarp jų lygus θ, bus nustatomas:

$$dF = dl_m dl_n \times sin\,\theta$$

Išskleidus lygties narius ir įvedus Gauso koeficientus gaunamos skaičiavimams tinkamos formulės pateiktos 6 lentelėje.

Atitinkamos formulės yra sukurtos skaičiuojant paviršių metrinius elementus. Jose taip pat įvedami Gauso koeficientai. Rutulio paviršiui Gauso koeficientai yra lygūs:

$$e = R^2; \quad g = r^2; \quad f = 0; \quad h = r \times R;$$

6 lentelė. Rutulio paviršiuje esančių linijų atkarpų, kampų ir plotų analizės formulės.

Rodiklis	Skaičiavimo formulės
Elementarios atkarpos ilgis *dD*	$dD^2 = M^2 \times dB^2 + r^2 \times dL^2$
Meridiano *dS* ir paralelės *ds* lankų ilgiai	$dS = M \times dB;\ \ ds = r \times dL$
Kampas θ tarp teigiamų meridiano ir paralelės krypčių	$\theta = \frac{\pi}{2};$
Krypties azimutas *A*	$tg\ A = \frac{r}{M} \times \frac{dL}{dB}$
Elementarios trapecijos plotas *dF*.	$dF = r \times M \times dB \times dL$

Sukimosi elipsoido paviršiuje Gauso koeficientų reikšmės yra:

$$e = M^2; \quad g = r^2 \qquad f = 0; \qquad h = r \times M;$$

6 lentelėje pateiktos sukimosi elipsoido paviršiui skirtos skaičiavimo formulės. Norint jas taikyti rutulio paviršiui, formulėse būtina pakeisti kai kuriuos narius:

1. Elipsoiodo platumą *B* pakeisti į rutulio *φ* platumą

2. Elipsoido ilgumą *L* pakeisti į rutulio *λ* ilgumą

3. Elipsoido meridiano kreivumo spindulį *M* į rutulio spindulį *R*.

4. Elipsoido paralelės spindulį *r* skaičiuoti rutuliui.

Taikant 5 ir 6 lentelėse pateiktas formules galima nustatyti trumpų atkarpų ilgius ir elementarių trapecijų plotus. Juos galima palyginti su elipsoido ir rutulio paviršių atitinkamais atkarpų ilgiais ir elementarių trapecijų plotais. Gauti dydžiai parodys dalinių ilgio ir ploto mastelių reikšmes.

Atstumų iškraipymas

Atstumų iškraipymas žemėlapyje pasireiškia per mastelio nepastovumą skirtingose žemėlapio vietose. Tai ypač būdinga smulkaus mastelio žemėlapiams. Dėl mastelio nepastovumo, žemėlapiuose netiksliai pateikiami geografinių objektų dydžiai. Iškraipymų mastą geriausiai atskleidžia daliniai masteliai. Skirtingose žemėlapio taškuose labai trumpos linijos vienodi ilgiai turi skirtingas realias reikšmes. Tiriant atstumų iškraipymus yra skiriami tokie rodikliai:

***m* – dalinis ilgių mastelis meridiano kryptimi.**

***n* – dalinis ilgių mastelis paralelių kryptimi**

***μ* - dalinis ilgių mastelis bet kuria kryptimi.**

Dalinis mastelis parodo santykį tarp labai trumpos linijos ilgio žemėlapyje ir tos pačios linijos ilgio, nustatyto elipsoido ar rutulio paviršiuje ir išreikšto pagrindiniu masteliu. (Elipsoido ir rutulio paviršiuje visada galioja pagrindinis mastelis). Naudojant Gauso koeficientus ir lyginant atitinkamų linijų ilgį plokštumoje bei elipsoido ar gaublio paviršiuje, galima išskaičiuoti meridiano ir paralelės mastelius:

$$m = \frac{\sqrt{e}}{M}; \quad n = \frac{\sqrt{g}}{r}$$

Šių mastelių sąsajas išreiškia formulė:

$$\mu^2 = m^2 \times cos^2 A + mnsin\theta \times sin2A + n^2 sin^2 A,$$

kur A – linijos, kuriai nustatomas dalinis mastelis krypties azimutas, matuojamas elipsoido paviršiuje; θ kampas tarp meridiano ir paralelės konkrečiame taške.

Paprastai skaičiuojant dalinį mastelį naudojama tokia lygtis:

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{sin^2(\theta - \alpha)}{m^2 sin^2\theta} + \frac{sin^2\alpha}{n^2 sin^2\theta}$$

Kur α - azimutas išmatuotas žemėlapyje krypčiai, kuriai ieškomas dalinis mastelis μ. Kai $\alpha = 0$, tai $\mu = m$. Kai $\alpha = \theta$, tai $\mu = n$.

Šios formulės aiškiai parodo, kad žemėlapyje daliniai masteliai priklauso nuo taško geografinės platumos bei ilgumos ir krypties azimuto.

Dalinius mastelius galima nustatyti žemėlapyje, jeigu žemėlapis turi kartografinį tinklą. Žemėlapyje matuojami paralelių ir meridianų lankų ilgiai, dauginami iš pagrindinio mastelio ir lyginami su paralelių ir meridianų lankų, esančių elipsoido ar gaublio paviršiuje (realiais) ilgiais. Paprastai skaičiuojamas pagrindinio ir dalinio mastelio santykis. Tokiu būdu nustatomi meridiano ir paralelės masteliai m ir n. Toliau matuojamas meridiano ir paralelės susikirtimo kampas θ bei azimutas α. Pasinaudojus šiais dydžiais ir formule, nustatomas dalinis mastelis.

Atkarpų ilgiai, išskyrus nulinių iškraipymų linijas, iškraipomi visose kartografinėse projekcijose. Kiekviename žemėlapio taške galima išvesti dvi kryptis, turinčias ekstremalius dalinius mastelius: viena kryptimi mastelis bus maksimalus, kita minimalus. Šių krypčių azimutai nustatomi pagal formulę:

$$g\,(2\beta) = \frac{n^2 \sin\,(2\theta)}{m^2 + n^2 \cos\,(2\theta)}$$

Kadangi tangento periodas lygus tai ši lygtis duoda dvi reikšmes: 0º ir + 90º. Tai reiškia, kad *ekstremalių mastelių kryptys yra statmenos.*

Pagrindinės kartografinių projekcijų kryptys – tai dvi statmenos kiekviename žemėlapio taške kryptys, kur daliniai masteliai turi didžiausias ir mažiausias reikšmes.

Jeigu meridianas ir paralelė kertasi stačiu kampu ($\theta = 90^o$), tai pagrindinės kartografinės projekcijos kryptys sutaps su meridiano ir paralelės kryptimis. Tai reiškia, kad ortogonalinėse kartografinėse projekcijose ekstremaliais masteliais bus meridiano (*m*) ir paralelės (*n*) masteliai.

Ekstremalūs masteliai žymimi šiais simboliais:

***a* – stambiausias mastelis.**

***b* – smulkiausias mastelis.**

Iš to seka, kad ortogonalinėse kartografinėse projekcijose galioja priklausomybės:

$a = m$, $b = n$ **arba** $a = n$, $b = m$

Ne ortogonalinėms kartografinėms projekcijoms daliniai meridiano (*m*) ir paralelės (*n*) masteliai, kampas tarp jų (θ), ekstremalūs masteliai a ir b ir pagrindinės krypties azimutas žemėlapiuose skaičiuojamas pagal formules:

$$a + b = \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn\sin\theta}$$

$$a - b = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\sin\theta}$$

$$tg\beta = \pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2 - m^2}{m^2 - b^2}} = \pm\frac{b}{b}\sqrt{\frac{n^2 - b^2}{a^2 - n^2}}$$

Remiantis tangentu nustatomos keturios kampo β reikšmes. Kadangi kampo ženklas gali būti teigiamas ir neigiamas, reiktų atsiminti, kad didžiausio dalinio mastelio kryptis žemėlapyje visada yra tame ketvirtyje, kur meridianas ir paralelė kirsdamiesi sudaro smailą (mažiau 90º) kampą.

Ilgių iškraipymą kartografinėse projekcijose vertina pagal formules:

$$v = \mu - 1 \qquad \text{aba} \qquad v = ln\mu;$$

Dažnai šie dydžiai pateikiami procentine išraiška. Pavyzdžiui, μ = 1,37. Tai reiškia, kad dalinis mastelis siekia 137 % pagrindinio mastelio. Šiuo atveju arba 37 % pagrindinio mastelio.

Naudojama keletas kriterijų, apibūdinančių santykinius iškraipymo visomis kryptimis nuo taško dydžius. Tam dažniausiai naudojami santykiniai rodikliai. Vienas jų – Eirio kriterijus:

$$\delta^2 = \frac{1}{2}[(a-1)^2 + (b-1)^2]$$

$$\delta^2 = \frac{1}{2}\left[(\frac{a}{b} - 1)^2 + (ab-1)^2\right]$$

Eirio – Kavraiskio kriterijus:

$$\delta^2 = \frac{1}{2}[ln^2 a + ln^2 b]$$

Taip pat naudojimai ir kitokie kriterijai. Būtina pabrėžti, kad visi kriterijai yra lokalūs, tai yra parodo iškraipymus tik konkrečiame žemėlapyje.

Plotų iškraipymas

Žemėlapyje kontorų plotai gali būti ženklai iškraipomi. 9 paveiksle (kairėje) parodytas teisingas geografinių objektų plotų santykis. To paties paveikslo b dalyje pateiktas žemėlapis, sudarytas Merkatoriaus lygiakampėje projekcijoje. Čia plotų iškraipymai poliarinėse srityse labai dideli: vizualiai Grenlandijos plotas beveik lygus Afrikos žemyno plotui. Realiai Afrikos plotas yra 15 kartų didesnis nei Grenlandijos plotas.

Dalinis žemėlapio mastelis gali būti nustatytas, naudojant vieną iš žemiau pateiktų formulių:

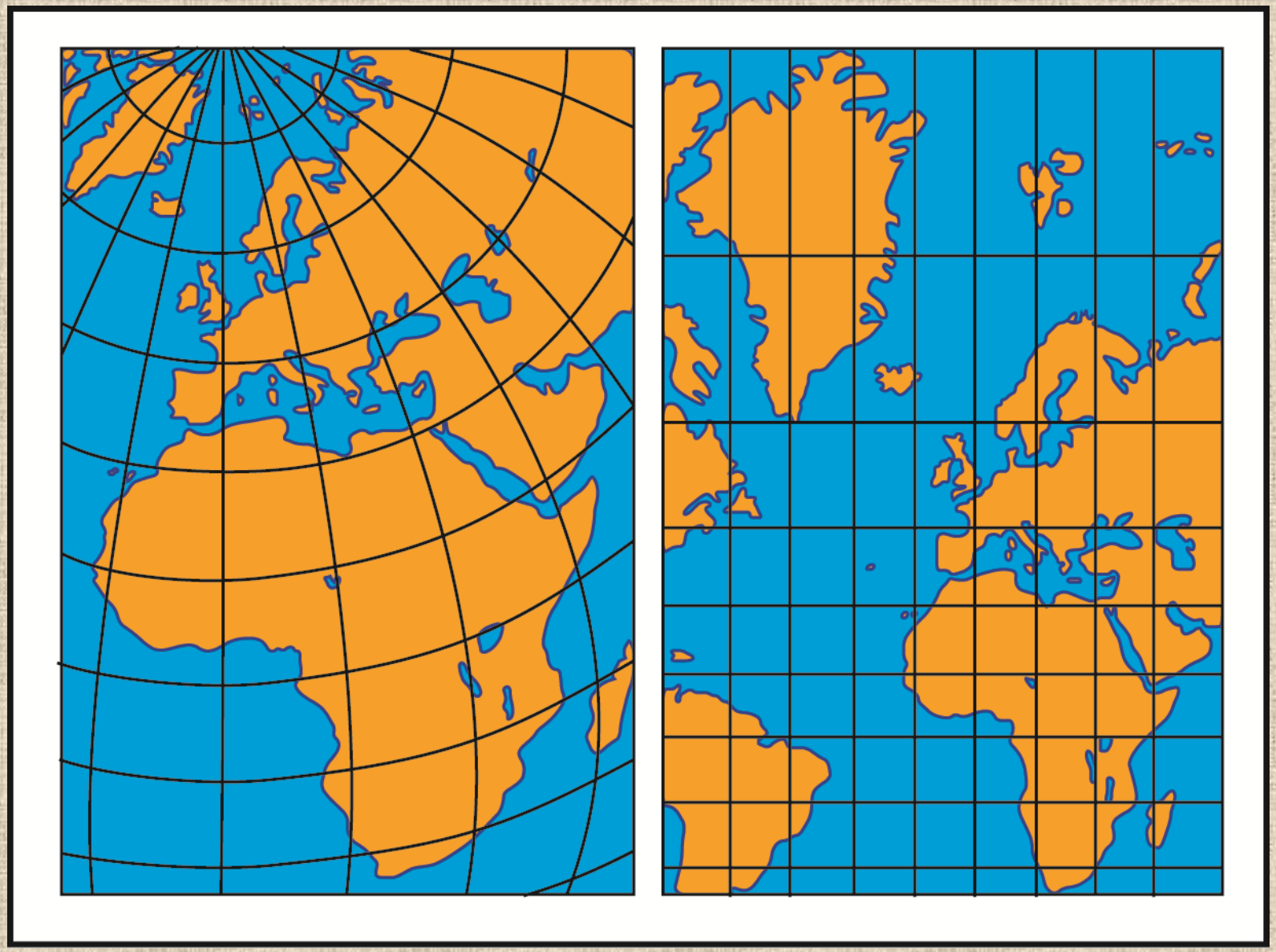
$$p = \frac{h}{r \times M}; \quad p = m \times n \times \sin\theta; \quad p = a \times b$$

Dalinis žemėlapio ploto mastelis kiekvienam taškui gali būti nustatytas išskaičiuojant dalinius mastelius meridiano ir paralelės kryptimi bei išmatuojant jų kirtimosi kampą.

Plotų iškraipymai apibūdinami santykiniais dydžiais, kurie skaičiuojami viena iš pateiktų formulių:

$$v = p - 1; \quad v = ln \times p$$

Plotų iškraipymo reikšmės yra pateikiamos procentais ir atspindi lokalius iškraipymo rodiklius.



Iškraipymų pobūdis. Kairėje – geografinių objektų plotai pateikti be iškraipymų, dešinėje – iškraipyti geografinių objektų plotai (Grenlandija ir Afrika).

Kampų iškraipymas

Azimutų iškraipymas. Bendru atveju krypties elipsoido paviršiuje azimutas *A* nėra lygus tos pačios krypties azimutui *α* žemėlapyje. Jų santykis yra aprašomas formule:

$$tg\alpha = \frac{n \times \sin\theta \times tgA}{m + n \times \cos\theta \times tgA}$$

Ši formulė rodo, kad projekcijose, kurios turi ortogonalinį kartografinį tinklą (kai $\theta = 90^o$) bei vienodus dalinius mastelius paralelės ir meridiano kryptimis ($m = n$), azimutų reikšmės neiškraipomos:

$$tg\alpha = tgA$$

Kitais atvejais neiškraipomi tik tie azimutai, kurių reikšmės yra lygios:

$$tg\alpha = \frac{n \times \sin\theta - m}{n \times \cos\theta}$$

Kampų tarp meridianų ir paralelių iškraipymas. **Rutulio ir elipsoido paviršiuje meridianai ir paralelės kertasi stačiais kampais. Žemėlapyje meridianai ir paralelės kertasi stačiais kampais tik ortogonalinių projekcijų atveju. Kitose projekcijose kampai tarp meridianų ir paraleių yra iškraipomi. Iškraipymo dydis nustatomas iš sankirtos kampo žemėlapyje atėmus statų kampą:**

$$\varepsilon = \theta - 90^\circ$$

Kampą galima išmatuoti žemėlapyje arba apskaičiuoti remiantis Gauso koeficientais pagal vieną iš pateiktų formulių:

$$\sin\varepsilon = -\frac{f}{\sqrt{e \times g}}; \qquad \cos\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{e \times g}}; \qquad tg\varepsilon = -\frac{f}{h}$$

Didžiausi kampų iškraipymai. Įvairaus dydžio krypčių kampai skirtinguose taškuose iškraipomi nevienodai. Kampai, esantys tarp pagrindinių krypčių visiškai neiškraipomi. Todėl vertinant kampų iškraipymą nustatomi didžiausi iškraipymai *(ω)*. Yra keletas formulių, kuriomis remiantis nustatomi maksimalūs kampų iškraipymai:

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}; \quad tg\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{2\sqrt{a\times b}};$$

$$tg\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2+n^2}{p}} - 2; \quad tg\left(\frac{\pi+\omega}{4}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}};$$

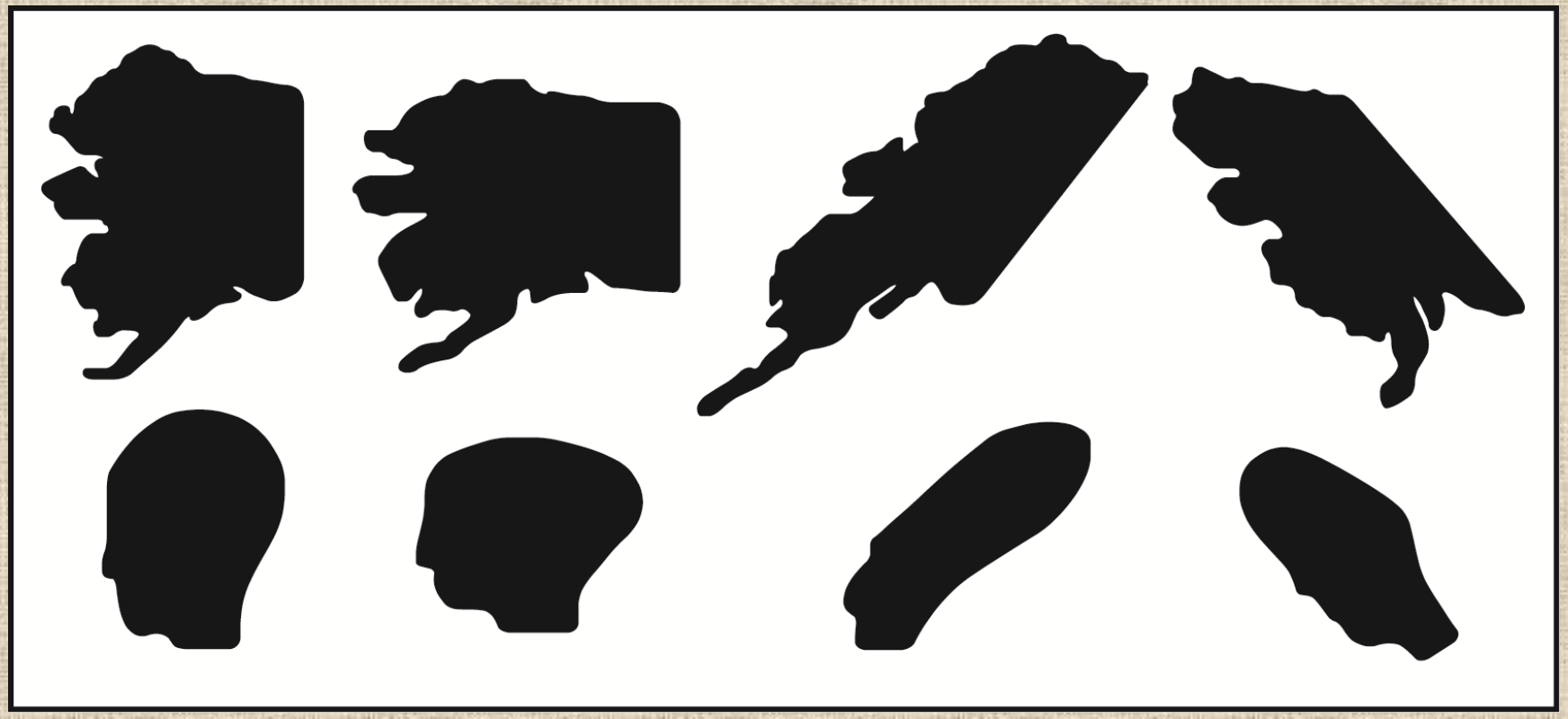
$$tg\left(\frac{\pi-\omega}{4}\right) = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Maksimalius kampų iškraipymus galima apskaičiuoti remiantis dydžiais *m*, *n*, ir *p*, kurie tiesiogiai išmatuojami žemėlapiuose. Prieš tai pateiktos formulės rodo, kad kartografinės projekcijos neiškraipo kampų, kuomet jų ekstremalūs masteliai yra vienodi *(a = b)*. Tačiau jeigu ekstremalūs masteliai yra vienodi, tai dalinis ilgių mastelis visiškai nepriklauso nuo krypties azimuto. Tai reiškia, kad lygiakampėse kartografinėse projekcijose, kur neiškraipomi kampai, dalinis ilgių mastelis yra pastovus ir nesikinta, keičiantis linijos krypčiai.

Formų iškraipymas

Ilgių iškraipymas lemia ir kontūrų iškraipymą. Kadangi nėra tokių kartografinių projekcijų, kurios neiškraipytų ilgių, todėl ir kontūrų formos yra iškraipomos visose projekcijose. Daugelis žmonių nepastebi stambių geografinių objektų (žemynų, salų, jūrų kontūrų) iškraipymų, kadangi su jų vaizdu susiduria nedažnai. Kita vertus, daug kas priklauso nuo to, kokioje projekcijoje sudaryti žemėlapiai, kuriuos ne-kartografai ar ne-geografai naudoja. Dažnai tai yra vienas ir tas pats žemėlapis, pavyzdžiui pasaulio. Dėl šios priežasties eiliniam vartotojui susiformuoja fiksuotas konkretus kontūro vaizdas. Pamatęs kitokią to paties objekto kontūro formą toks vartotojas dažnai sutrinka ir tik tuomet susimąsto apie galimą formos iškraipymą įvairių projekcijų žemėlapiuose.

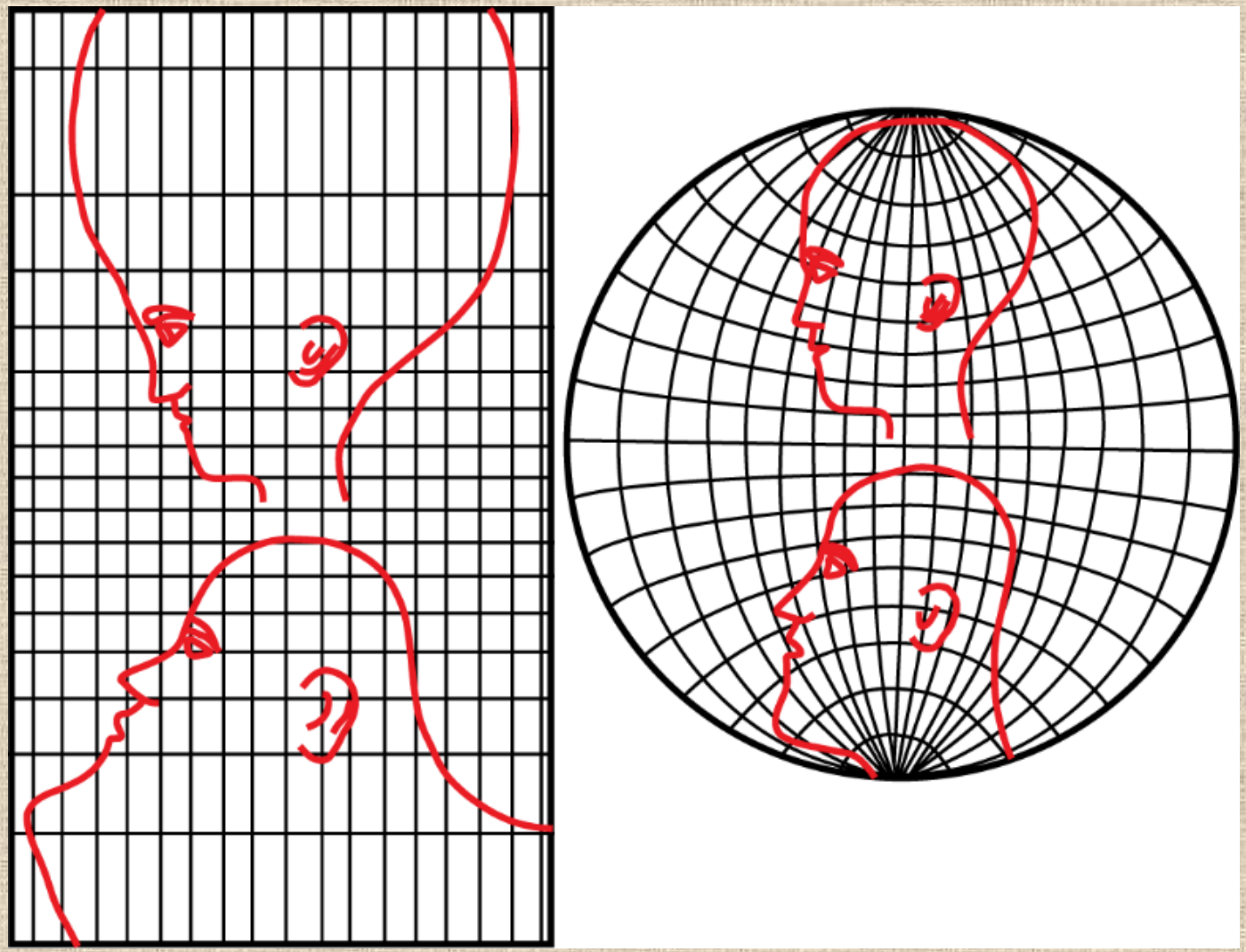
Įvairiose šalyse vykdyti tyrimai parodė, kad daugeliui žmonių geografinių objektų forma ir jos dydis yra susijęs su kartografiniu vaizdu, kuris pateikiamas ortogonalinėje (stačiakampėje) lygiakampėje Merkatoriaus projekcijoje. Tačiau šioje projekcijoje formos ir dydžio iškraipymai, ypač poliarinėse srityse, yra nepaprastai dideli. Geografinių objektų formos iškraipymo suvokimo palyginimui naudojamas žmogaus galvos kontūras. 10 paveiksle pateiktos Aliaskos pusiasalio ir žmogaus galvos kontūrų formos įvairiose kartografinėse projekcijose, gerai iliustruojančios palyginamąją situaciją. Kiekvienoje kartografinėje projekcijoje pateiktas Aliaskos pusiasalio kontūras ir žmogaus galvos formos kontūras.



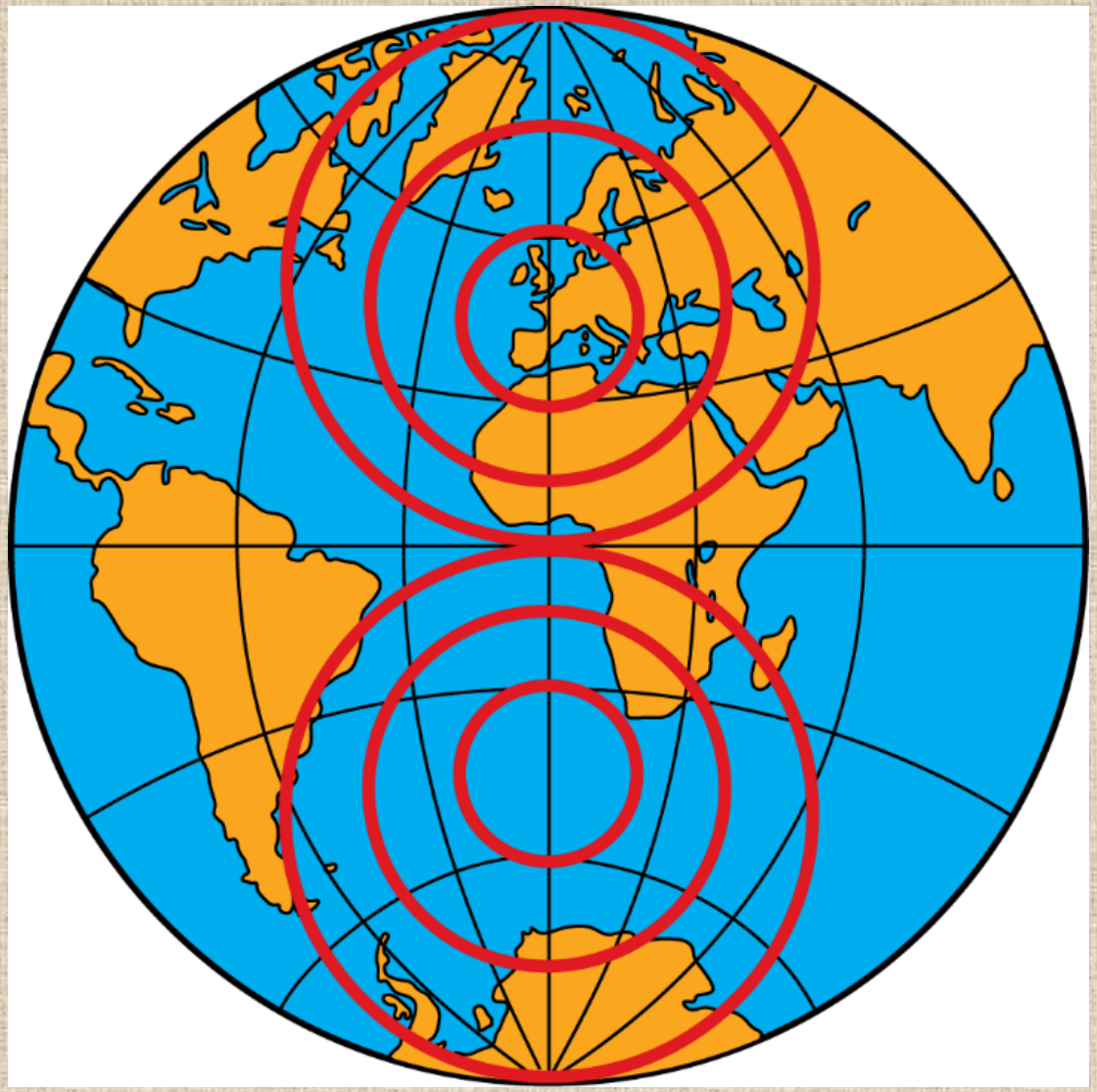
Aliaskos kontūras ir žmogaus galvos profilis įvairiose kartografinėse projekcijose.

Atrodytų, kad lygiakampėse (konforminėse, *coformis – panašus*) projekcijose, kuriose daliniai masteliai nepriklauso nuo linijų azimuto, neturėtų būti deformuojami kontūrai. Tačiau taip nėra. Jose taip pat iškraipomos objekto formos. Iškraipymo dydis jose labai priklauso nuo objekto dydžio: kuo objektas didesnis, tuo didesnis iškraipymas. Lygiakampėse projekcijos objekto formos ir jo kartografinio vaizdo panašumas išlaikomas tik tuomet, kada kartografuojami objektai yra labai mažo dydžio. Pavyzdžiui, labai mažo skersmens apkritimas nuo elipsoido paviršiaus perkeliant į plokštumą išlieka apskritimu. Tačiau šio apskritimo dydis kinta priklausomai nuo geografinės platumos. Tik kai kuriose vietose apskritimo dydis atitiks pagrindinį žemėlapio mastelį, o kitur jis bus didesnis (dažniausiai) arba mažesnis (retai). Galų gale tai virsta objekto kontūrų iškraipymu. Pavyzdžiui, sala, turinti apskritimo formą ir apimanti didesnį plotą. Kiekvienas šio kontūro taškas į žemėlapį perkeliamas kaip konforminis vaizdas. Tačiau, tolstant polių link, didėja daliniai masteliai. Tai reiškia, kad apskritimas ištempiamas ir tampa ekscentrišku, įgydamas kriaušės formą.

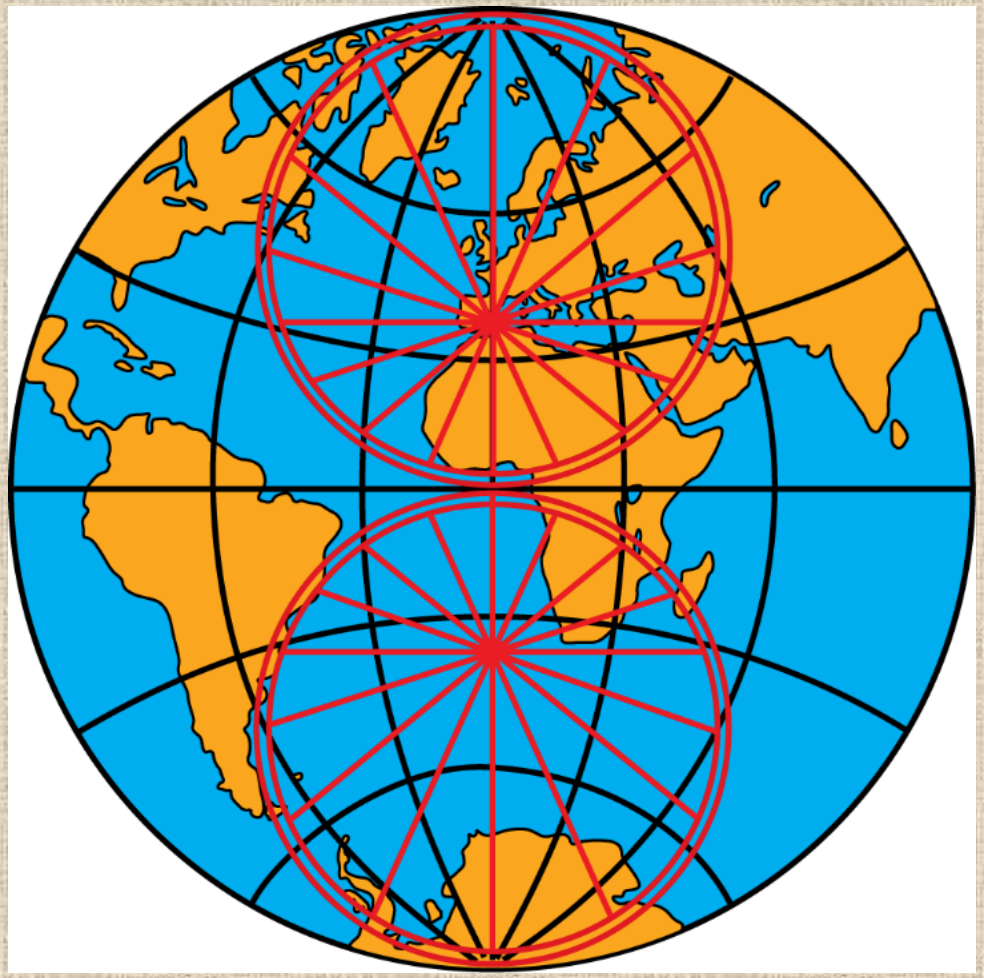
Toliau esančioje iliustracijoje pateikti du skirtingų projekcijų vaizdai: normali lygiakampė Merkatoriaus (kairėje) ir skersinė azimutinė stereografinė (dešinėje). Šios abi projekcijos yra konforminės, tai yra jos neiškraipomos linijų kryptys. Tačiau labai akivaizdžiai matome, kad formų iškraipymas šiose projekcijose yra didelis.



Formų iškraipymas normalioje cilindrinėje lygiakampėje Merkatoriaus ir azimutinėje stereografinėje projekcijoje.



Koncentriški apskritimai rutulio paviršiuje juos perkėlus į skersinę azimutinę stereografinę projekciją pasislinko ekvatoriaus link. Tas gerai matyti polių srityje.



Apskritimas gaublyje, jį perkėlus į azimutinę skersinę strerografinę projekciją išlieka apskritimu. Tačiau pasislenka apskritimo centro padėtis – jis pasislenka ekvatoriaus link ir atstumas nuo apskritimo centro iki ekvatoriaus tampa žymiai trumpesnis, nei atstumas nuo centro iki poliaus.

Skersinėje azimutinėje stereografinėje projekcijoje bet koks elipsoido paviršiuje nubrėžtas apskritimas, nuo labai mažo skersmens iki didelio, išlieka apskritimu. Sudaromas įspūdis, kad šioje projekcijoje neiškraipomos kontūrų formos. Iš tikro, kaip rodo žmogaus galvos formos pasikeitimai, skersinėje azimutinėje stereografinėje projekcijoje vyksta ženklūs formos iškraipymai. Tai yra todėl, kad apskritimas elipsoido paviršiuje ir tas pats apskritimas žemėlapyje yra skirtingos figūros. Žemėlapyje vyksta apskritimo taškų padėties persiskirstymas bei apskritimo centro persistūmimas. Apskritimo centras įgyja kitą padėtį, kuri neatitinka apskritimo centro padėties elipsoido paviršiuje. Projektuojant į plokštumą viena apskritimo spindulių dalis yra suspaudžiama, kita – ištempiama. Dėl šios priežasties kontūrų forma pakinta.

Šios deformacijos aiškia matomos išskleidžiant elipsoido paviršiuje nubrėžtus apskritimus plokštumoje (prieš tai rodyti paveikslai). Apskritimai žemėlapyje apytikriai yra tose pačiose vietose, kaip ir žmonių galvų kontūrai, pateikti 11 paveiksle. Apskritimų forma nepakito, tačiau pasikeitė jų padėtis. Pirmame paveiksle koncentriški apskritimai pasilinko ekvatoriaus link ir jų spindulys į ekvatoriau pusę tapo trumpesnis nei poliaus kryptimi. Antrame paveiksle pateiktas apskritimo spindulių transformacijos vaizdas. Apskritimo žemėlapyje centras sutampa su apskritimo, nubrėžto elipsoido paviršiuje centru. Tuo tarpu apskritimo spindulių ilgis ekvatoriaus kryptimi yra trumpesnis nei spindulių ilgis polių kryptimi.

Be galo mažo dydžio kontūrų iškraipymas yra vertinamas per formų koeficientą. Jis nustatomas per maksimalaus dalinio mastelio (*a*) santykį su minimaliu daliniu masteliu (*b*) bei palyginant šio santykio nuokrypį nuo vieneto (Eirio kriterijus):

$$K = \frac{a}{b}; \qquad v_k = \frac{a}{b}$$

Kuo labiau skiriasi daliniai *a* ir *b* masteliai, tuo labiau kontūras yra ištemptas *a* kryptimi.

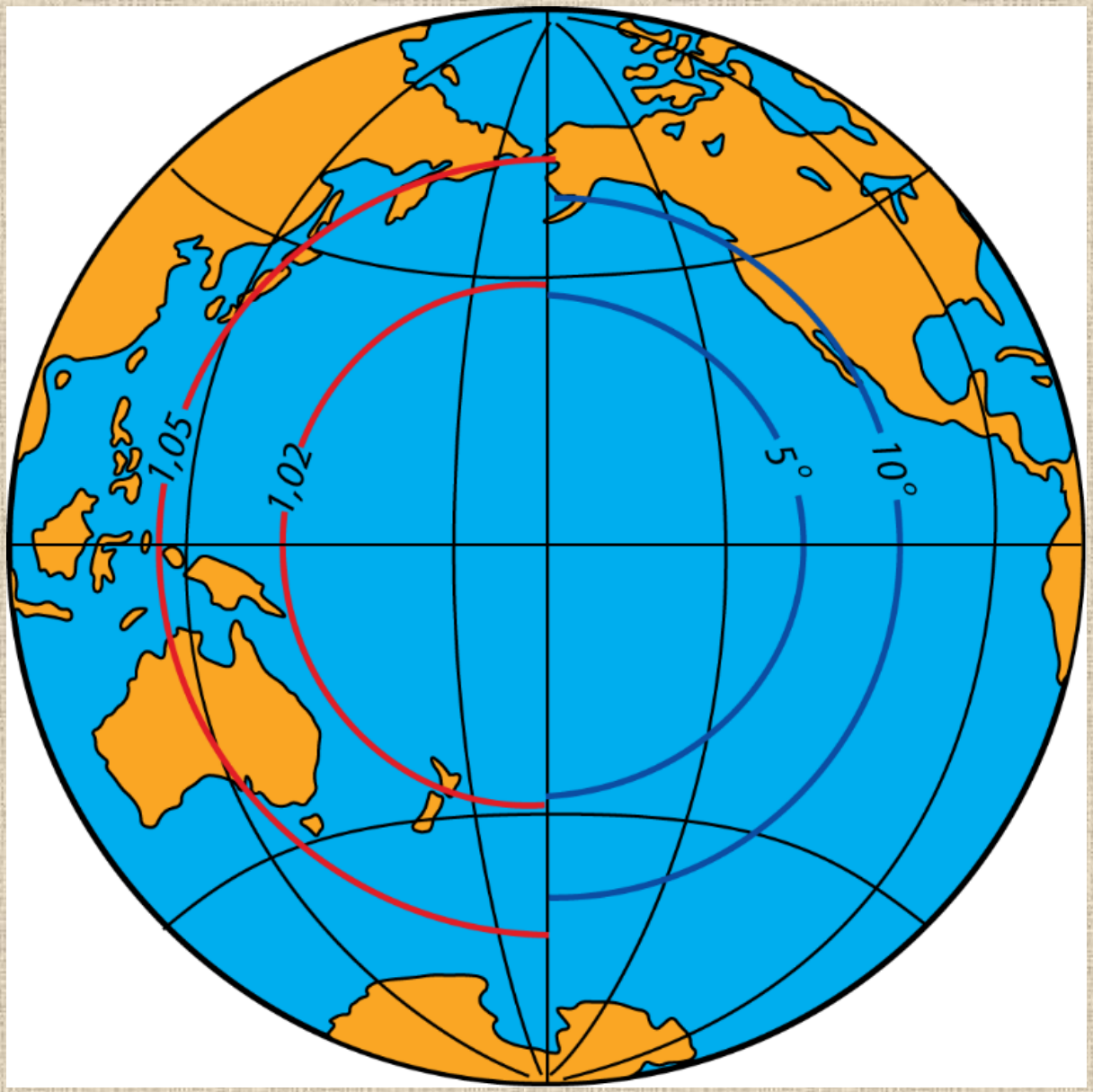
Lokalių iškraipymų vaizdavimas žemėlapiuose

Iškraipymų, kurie kyla sudarant žemėlapius, vaizdavimui naudojami įvairūs pateikimo būdai: žmogaus galvos kontūrai, izokolos, iškraipymo elipsės ir kiti. Šie iškraipymų pateikimo būdai turi būti kiek galima paprastesni ir vaizdūs. Vienas plačiausiai taikomų iškraipymo pateikimo būdų yra izokolos. Izokola – tai kreivės, jungiančios vienodo iškraipymo dydžio (linijų, kampų, plotų) taškus.

Izokolos gali charakterizuoti įvairius iškraipymo rodiklius: ilgių iškraipymą, plotų iškraipymą, kampų iškraipymą, formų iškraipymą. Izokolų vaizdas, pateiktas žemėlapyje dažniausia apibūdina tik vieną iš minėtų rodiklių, rečiau kelis. Šis iškraipymų pateikimo būdas yra paprastas, kas lėmė jo populiarumą. 14 paveiksle pateiktas žemėlapio maketas, kuriame pavaizduotos plotų p ir kampų ω iškraipymo izokolos.

Izokolos yra patogios tuo, kad jomis akivaizdžiai parodoma kokiomis kryptimis ir kokiu dydžiu didėja ar mažėja iškraipymai ir kur yra didžiausi ir mažiausi iškraipymai.

Kitas būdas, leidžiantis vaizdžiai pateikti iškraipymą yra iškraipymo elipsė, dar vadinama Tiso indikatrise. Iškraipymo elipse yra pateikiamas be galo mažo apskritimo, nubrėžto rutulio ar elipsoido paviršiuje, vaizdas žemėlapyje. Elipsės pusašės atitinka ekstemalius ilgių mastelius *a* ir *b*, o ašys yra orientuotos pagrindinėmis (šiaurės – pietų ir rytų – vakarų) kryptimis.



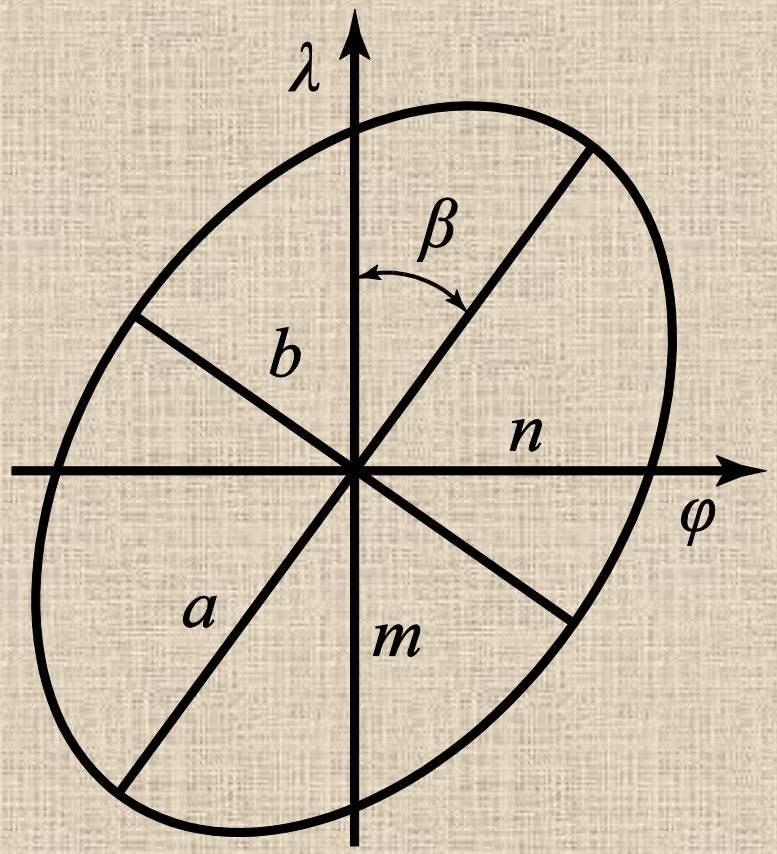
Plotų (kairėje) ir kampų (dešinėje) iškraipymo izokolos.

Elipsės vektoriaus spindulio ilgį lemia dalinis ilgių mastelis, kuris charakterizuoja ilgių iškraipymą. Elipsės forma iliustruoja kampų ir formų iškraipymą – kuo labiau elipsės forma skiriasi nuo apskritimo, tuo didesnis iškraipymas. Elipsės plotas atitinka plotų iškraipymą – kuo labiau elipsės plotas skiriasi nuo apskritimo ploto, tuo didesnis ploto iškraipymas. Visa tai rodo, kad iškraipymų elipsė yra labai vaizdus lokalinių iškraipymų pateikimo būdas, leidžiantis pateikti įvairių iškraipymų kiekybines charakteristikas.

Iškraipymų elipsės, kuri įvardijama kaip be galo mažas apskritimas, ašys yra siejamos su 5 mm skersmens apkritimo spinduliu. Tokiu masteliu yra sudaromos ir iškraipymo elipsės. Iškraipymo elipsės gali būti konstruojamos (braižomos) manualiniu būdu. Pagrindinėmis kryptimis atidedamos ekstremalių mastelių *a* ir *b* reikšmės, o meridianų ir paralelių kryptimi – dalinių mastelių m ir n reikšmės. Tokiu būdu elipsei nubraižyti fiksuojami 8 taškai, kuriuos sujungia tolydi kreivė. Taip gaunama iškraipymų elipsės figūra.

Visas iškraipymo elipses, kurios pateikiamos žemėlapyje galima palyginti tarpusavyje ir su vienodų projekcijų žemėlapiais, kuriems nėra brėžtos iškraipymų elipsės. Iškraipymų dydis ir pobūdis turi būti siejamas su tais taškais, kurie atitinka iškraipymų elipsės centrus.

Iškraipymų elipsės metodas turi trūkumą – sunku įvertinti suminį iškraipymą didelio ploto baigtiniams kontūrams. Pavyzdžiui, žemynams, vandenynams.



Iškraipymo elipsė (Tiso indikatrisė): *a* – dalinis stambiausias elipsės mastelis, *b* – dalinis smulkiausias elipsės mastelis, *m* – meridiano mastelis, *n* – paralelės mastelis, *β* - didžiosios elipsės pusašės azimutas žemėlapyje.

Regioninio masto iškraipymai

Lokalinio pobūdžio iškraipymai charakterizuoja tik be galo mažo apskritimo (r = 5 mm) iškraipymą žemėlapio paviršiuje. Kita vertus, dažnai norima įvertinti viso žemėlapio ar jo dalies iškraipymą. Tam tikslui naudojami dviejų tipų kriterijai: minimalaus ir variacinio iškraipymo. Jie dar vadinami regioniniu ar globaliu iškraipymu.

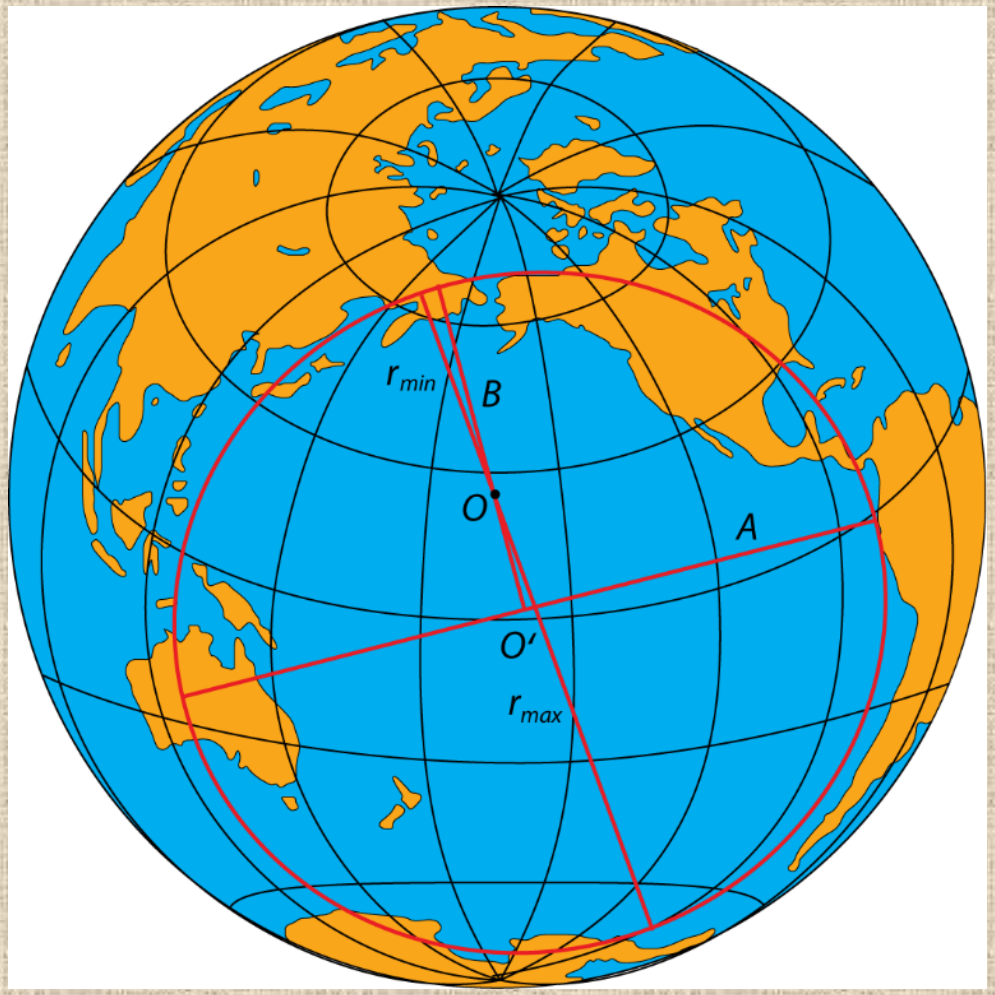
Kai vertinamas maksimalus iškraipymas regionui, pavaizduotam keliose projekcijose ar to paties žemėlapio skirtingų regionų maksimalus iškraipymas, skaičiuojami maksimalūs iškraipymo rodikliai. Tuomet geriausiai tinkamu kartografiniu vaizdu (kartografine projekcija) laikomas tas, kuriame maksimalūs iškraipymai yra mažiausi.

Naudojant variacinio tipo kriterijus yra skaičiuojamas vidutinis kvadratinis iškraipymo nuokrypis tiriamam regionui. Labai patogus ir vaizdus yra žiedų (ratų) metodas. Žiedai brėžiami sferos (rutulio ar gaublio) paviršiuje, o vėliau perkeliami į žemėlapio plokštumą. Žemėlapyje jie virsta deformuotomis figūromis, kurios vadinamos *iškraipymo figūromis*.

Iškraipymo figūros kuriamos taip: elipsoido paviršius tiriamame taške pakeičiamas rutulio paviršiumi. Rutulio spindulys *R* atitinka elipsoido pagrindinio vidutinį geometrinio spindulio ilgį tame taške. Rutulio paviršiuje brėžiamas apskritimas, kurio centras sutapatinamas su nagrinėjamu tašku. Apskritimo spindulys yra lygus dydžiui *D*. Apskritimo dydis gali būti labai įvairus: nuo kelių mm iki valstybės ar žemyno dydžio. Šio apskritimo paviršiuje fiksuojama 100 – 200 taškų padėtis. Apskritimo centrui ir kiekvienam fiksuotam taškui nustatomos sferinės koordinatės: platuma φ ir ilguma λ. Po to, apskritimo centrui bei fiksuotiems taškams skaičiuojamos stačiakampės x_i ir y_i koordinatės. Vėliau apskritimas ir jo diametras braižomas žemėlapyje. Apskritimo forma ir jo dydis leidžia spręsti apie regioninio pobūdžio iškraipymą. Tyrimų seką iliustruoja 16 paveikslas.

Iškraipymo žiedai labai patogūs siekiant gauti kiekybinius iškraipymo rodiklius. Kiekvienam žiedui nustatomos koordinatės rutulio ir plokštumos paviršiuose. Šie duomenys gali būti naudojami skaičiuojant kampų, ilgių plotų ir kitus iškraipymus.

Regioninio pobūdžio iškraipymo rodikliai skaičiuojami skirtingai nei lokaliniai iškraipymo rodikliai. Jie apima ilgio, ploto ir formos iškraipymą.



Iškraipymo figūra: *O* – apskritimo rutulio paviršiuje centro padėtis kartografinėje projekcijoje, r_{min} ir r_{max} – minimalus ir maksimalus nuotoliai nuo apskritimo centro iki apskritimo ribos, *O′* - didžiausių iškraipymų figūros centras, *A* ir *B* – didžiausias ir mažiausias nuotolis nuo iškraipymo figūros centro iki apskritimo linijos.

***Ilgio iškraipymas*. Santykinis ilgio iškraipymas skaičiuojamas pagal formulę:**

$$v_l = \frac{l}{D} - 1$$

Kur *l* – atstumas žemėlapyje tarp apskritimo centro ir jį fiksuojančios linijos, *D* – atstumas rutulio paviršiuje tarp apskritimo centro ir jį fiksuojančios linijos. Remiantis šia formule nustatomas vidutinis kvadratinis ilgio iškraipymo nuokrypis.

Plotų iškraipymas. **Santykinis ploto iškraipymas nustatomas pagal formulę:**

$$v_p = \frac{F}{P} - 1$$

Kur *P* – figūros plotas rutulio paviršiuje, *F* – figūros plotas žemėlapyje. Dydžiai *P* ir *F* skaičiuojami pagal formules:

$$P = \pi \times r^2; \quad r = 2R \sin \frac{D}{2R};$$

$$F = 0,5 \times \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) \times (y_{i+1} + y_i)$$

***Formų iškraipymas*. Jis vertinamas prisilaikant atitinkamų nuostatų. Daroma prielaida, kad apskritimo vaizdas nuo sferinio paviršiaus (rutulio, elipsoido) į bet kokios projekcijos žemėlapį perkeliamas iškraipius jo spindulio ilgį. Tokia situacija yra ir stereografinės projekcijos atveju. Žemėlapyje apskritimas transformuojasi į uždarą ovalią figūrą, kurios spinduliai yra nevienodi. Tai leidžia apskaičiuoti maksimalaus (r_{max}) ir minimalaus (r_{min}) spindulių santykį. Formos iškraipymas nustatomas skaičiuojant šio koeficiento nuokrypį nuo vieneto:**

$$K_F = \frac{r_{max}}{r_{min}}; \quad v_F = K_F - 1$$

Taip pat naudojamas ir kitas formos iškraipymo įvertinimo būdas. Sferos (rutulio, elipsoido) paviršiuje brėžiamas apskritimas, kuri žemėlapyje virsta sudėtingesne figūra. Nustatomas maksimalus šios figūros skersmuo. Iš figūros centro brėžiamas apskritimas, kurio spindulys atitinka minimalų nuotolį nuo figūros centro. Maksimalus spindulys (*A*) atitinka elipsės didžiąją pusašę, o minimalus (*B*) – mažąja elipsės pusašę (iškraipymų elipsės paveikslas). Skaičiuojamas koeficientas K_w, kuris atspindi maksimalaus ir minimalaus spindulių santykį. Tai stereografiškumo koeficientas, kuris charakterizuoja formos iškraipymą. Stereografiškumo koeficientas nustatomas pagal formulę:

$$K_w = \frac{A}{B};\ v_w = \frac{A}{B} - 1$$

Stereografinėse rutulio projekcijose stereografiškumo koeficientas visada lygus 1, o apskritimo iškraipymas – 0. Šis koeficientas charakterizuoja kartografinių projekcijų artimumą stereografinei projekcijai. Visose lygiakampėse projekcijose stereografiškumo koeficientas artės prie 1, kai sferos paviršiuje (rutulio, elipsoido) bus brėžiami kiek galima mažesnio spindulio apskritimai. Tai reiškia, kad šis koeficientas, lygiai kaip ir iškraipymo elipsės, gali charakterizuoti kampų iškraipymą.

Visi pateikti skaičiuojami dydžiai yra santykiniai, todėl jie dažnai dauginami iš 100 % ir įgauna procentinę iškraipymo išraišką.

Kadangi vertinant iškraipymą sferos (rutulio, elipsoido) paviršiuje fiksuojama keli šimtai taškų, yra galimybė atlikti matavimų rezultatų tikslumo (patikimumo) statistinę analizę. 16 pavyzdžio šie statistiniai rodikliai bus tokie (7 lentelė):

7 lentelė. Matavimo rezultatų statistinės analizės pavyzdys.

Eil. Nr.	Iškraipymo rodiklis	Dimensija	Reikšmė
1	Ploto iškraipymas	%	0
2	Spindulio ilgio iškraipymas	%	9,6
3	Formos koeficientas		1,3
4	Apskritimo formos iškraipymas	%	12,8
5	Spindulio ilgis sferos paviršiuje	km	8751,6
6	Maksimalaus spindulio ilgis sferos paviršiuje	km	8771,1
7	Minimalus spindulio ilgis sferos paviršiuje	km	6830,2
8	Didžioji elipsės pusašė žemėlapyje	km	8474,7
9	Mažoji elipsės pusašė žemėlapyje	km	7512,2
10	Apskritimo plotas sferos paviršiuje	km^2	2,05 × (E + 08)
11	Apskritimo plotas žemėlapyje	km^2	2,05 × (E + 08)
	(E + 08) =10^8		

Gautų duomenų analizė. Sferos (rutulio, elipsoido) paviršiuje brėžiamas apskritimas, kurio centras yra Ramiojo vandenyno centrinėje dalyje. Sferos paviršiuje šio apskritimo spindulys lygus 8752 km. Apskritimo plotas – 205 mln. km^2. Šis dydis 15 % viršija realų Ramiojo vandenyno plotą, Apskritimas apima beveik visą Ramųjį vandenyną ir prie jo esančias žemynų dalis. Šiame žemėlapyje nėra plotų iškraipymo. Formos koeficientas lygus 1,3. Tai reiškia, kad formos iškraipymas siekia 30%. Stereografiškumo koeficientas rodo, kad apskritimo formos deformacija siekia 12,8 %.