NUSTATYTŲ SAVYBIŲ PROJEKCIJŲ KŪRIMAS

Projekcijų, turinčių nustatytas savybes, kūrimas

Kuriant nustatytų savybių kartografines projekcijas yra sprendžiamas atvirkštinis matematinės kartografijos uždavinys. Šio uždavinio sprendimo esmė: pradžioje nustatomos būsimų kartografinių projekcijų savybės, o po to kuriamos išvestinės lygtys ir formulės, charakterizuojančios projekcijos iškraipymų dydį bei nustatančios kartografinio tinklo koordinates (paralelių ir meridianų susikirtimo taškų padėtį).

Atvirkštinio matematinės kartografijos uždavinio sprendimas vyksta nustatant diferencialinių lygčių dalines išvestines. Šio būdo privalumas yra tas, kad yra galimybė sukurti projekcijas, optimaliai tenkinančias iškeltas sąlygas, o trūkumas – tas, kad reikia atlikti labai sudėtingus matematinius skaičiavimus.

Lygiakampių projekcijų konstravimas.

Lygiakampės projekcijos pasižymi šiomis savybėmis:

1. Labai trumpos atkarpos dalinis ilgių mastelis nepriklauso nuo linijos krypties azimuto.

2. Išsaugojamas labai mažo ploto figūrų panašumas sferiniame paviršiuje ir plokštumoje.

3. Projekcija neiškraipo kampų.

Visos trys charakteristikos yra tarpusavyje susiję ir kiekviena jų lemia kitas dvi.

Lygiakampio vaizdo kūrimas plokštumoje reikalauja, vaizdo izometriškumo, tai yra mazginių taškų koordinatės turi būti izometrinės. Jos kuriamos perkeliant koordinačių tinklą nuo elipsoido paviršiaus į plokštumą. Elementarios trumpos atkarpos ilgį elipsoido paviršiuje apibūdina formulė:

$$d \times D^2 = (M \times d \times B)^2 + (r \times d \times L)^2$$

Kur *M* – meridiano spindulys, *r* – paralelės spindulys, *B* – geodezinė platuma, *L* – geodezinė ilguma, *d* – labai trumpa linija sferiniame paviršiuje, *D* – labai trumpos linijos ilgis plokštumoje.

Meridiano spindulys nėra lygus paralelės spinduliui *(M ≠ r)*. Todėl, kai diferencialai *dB = dL* meridiano atkarpos ilgio pokytis nėra lygus paralelės atkarpos ilgio pokyčiui *(MdB ≠ rdL)*. Tai reiškia, kad elipsoido paviršiuje geodezinė koordinatė (platuma B ir ilguma L) nėra izometriškos. Tokios pat neizometriškos yra ir gaublio platuma *φ* ir ilguma λ . Dėl šios priežasties geografinė platuma ir ilguma nėra patogios kuriant lygiakampes projekcijas.

Izometrinio vaizdo kūrimui naudojamos tokios koordinatės, kuriose vienodo ilgio diferencialus *dB = dL* atitinkančios linijų atkarpos elipsoido paviršiuje taip pat būtų vienodos. Tam būtina elementarių atkarpų ilgio formulę transformuoti:

$$(d \times D)^2 = r^2 \times (dq^2 + dL)^2 \quad \text{ir} \quad dq = \left(\frac{M}{r}\right) dB$$

Kur *q* – izometrinė platuma, *l* – izometrinė ilguma, *k* – yra išorinio meridiano apskritimo spindulys.

Šiuo atveju diferencialams *dq = dL* atitinka vienodo ilgio elipsoido koordinačių tinklo atkarpos *(rdq = rdL)*. Išskaičiavus ir integralus gaunama izometrinių koordinačių išraiška:

$$q = \int_0^B \frac{M}{r} dB; \quad l = \int_{L_0}^{L} dL = L - L_0$$

Izometrininėmis elipsoido koordinatėmis yra izometrinė platuma *q* ir izometrinė ilguma *l*. Be to, izometrinė ilguma *l* skaičiuojama nuo nustatyto ašinio meridiano L_o.

Atlikus integravimą izometrinei projekcijai nustatoma izometrinė platuma:

$$q = ln\sqrt{\left(\frac{1+sinB}{1-sinB}\right)\left(\frac{1-esinB}{1+esinB}\right)^{e}}$$

Kur *e* – pirmasis sukimosi elipsoido ekscentrisitetas. Geodezinė platuma nustatoma priartėjimo būdu, naudojant formulę:

$$B = 2arctg\left[e^{q}\sqrt{\left(\frac{1+esinB}{1-esinB}\right)^{e}}\right] - \frac{\pi}{2}.$$

Geodezinei platumai skaičiuoti taip pat naudojamos ir kitos formulės:

$$B = \varphi + k_2 sin2\varphi + k_4 sin4\varphi + \cdots \ldots, \qquad \varphi = 2arctg(e^{q}) - \frac{\pi}{2},$$

$$k_2 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{5}{24}e^4 + \cdots \qquad k_4 = \frac{7}{48}e^4 + \cdots$$

Lygiakampių projekcijų lygtyse dažnai naudojama funkcija *U*, kuri yra susieta su izometrine platuma:

$$q = lnU \qquad U = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2}\right)\left[\frac{1-esinB}{1+esinB}\right]^{\frac{e}{2}}$$

Sferos paviršiui ekscentrisitetas *e* lygus 0. Sferos paviršiui elipsoidinę (geodezinę) platumą B galima pakeisti geografine platuma *φ* arba zenitiniu nuotoliu *Z*. Tuomet gaunama:

$$U = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{arba} \quad U = \frac{1}{2}\left(\frac{Z}{2}\right)$$

Santykinis lygiakampiškumas kartografinėse projekcijose sukuriamas taikant analitinės kompleksinio kintamojo funkcijas. Šių funkcijų kintamaisiais yra izometrinės koordinatės:

$$x + iy = f(q + il); \;\; i = \sqrt{-1}$$

Kaip įprasta, abscisių (*x*) ašis yra orientuota į šiaurę pagal vidurinį meridianą, o ordinačių (*y*) – į rytus.

Galima įrodyti, kad kompleksinio kintamojo funkcija sukuria lygiakampį vaizdą. Tam būtina nustatyti atitinkamas dalines išvestines ir nustatyti Gauso koeficientus. Kompleksinio kintamojo analitinės funkcijos turi tenkinti tokias diferencijavimo sąlygas:

$$x_q = y_i; \qquad y_q = -x_i$$

Įvertinus *dq* ir *dB* priklausomybes gaunamos formulės:

$$x_q = x_B \frac{r}{M}\; ;\; y_q = y_B \frac{r}{M}$$

Iš čia seka, kad:

$$x_l = -y_B \frac{r}{M}; \quad y_l = x_B \frac{r}{M}$$

Šios lygtys leidžia nustatyti sąryšį tarp stačiakampių koordinačių (*x*, *y*) dalinių išvestinių, remiantis geodezinėmis koordinatėmis (*B*, *L*). Naudojant šias išvestines Gauso koeficientų skaičiavimui gaunama, kad:

$$\frac{\sqrt{e}}{M} = \frac{\sqrt{g}}{r}; \quad f = 0$$

Šios lygtys išreiškia visus lygiakampiškumo požymius. Pirmoji lygtis išreiškia dalinių mastelių atitikimą meridianų ir paralelių kryptimi, antroji – kartografinio tinklo stačiakampiškumą. Ortogonalinio tinklo masteliai meridianų ir paralelių kryptimi yra ekstremalūs. Tai reiškia, kad mažiausias ir didžiausias masteliai yra lygūs. Kitais žodžiais tariant, mastelio dydis nepriklauso nuo krypties azimuto. Kai ekstremalių ilgio mastelių dydžiai yra vienodi, tai be galo mažų kontūrų formų ir kampų iškreipimai lygūs 0. Tuomet tampa paprastesne ir dalinio ploto mastelio formulė.

Pagrindiniai projekcijos parametrai atrodo taip:

$$\varepsilon = 0; \quad m = n = a = b; \quad v_K = \frac{a}{b} - 1 = 0; \quad sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}; \quad p = n^2$$

Galima nustatyti dalinio mastelio *n* reikšmes. Projekcijoms, kurių koordinačių tinklo lankams būdingas pastovus kreivumas, dydis *n* nustatomas naudojant tokias formules:

Cilindrinėms projekcijoms $n = \frac{C}{r}.$

Azimutinėms projekcijoms $n = \frac{\rho}{r}.$

Kūginėms projekcijoms $n = \alpha \frac{\rho}{r}.$

Polikūginėms projekcijoms $n = \delta_L \frac{C}{r}.$

Įvairios kompleksinio kintamojo funkcijos įtakoja lygiakampių projekcijų lygtis.

1. Linijinė funkcija $x = iy = C(q + il).$

Kairioji ir dešinioji šios funkcijos dalys yra susiję tarpusavyje proporcingumo koeficientu *C*. Atskyrus realią ir menamą dalis, gaunama normalios cilindrinės lygiakampės Merkatoriaus projekcijos lygtis:

$$x = Cq; \quad y = C(L - L_0).$$

***C* koeficientas parodo, koks yra cilindro, į kurį projektuojamas elipsoido paviršius, pagrindo spindulio ilgis.**

Ekvatoriuje abscisė *x* lygi 0 , esant maksimaliam geografinės ilgumos skirtumui ± *π*, ordinatė *y* bus lygi ± *π C*. Atitinkamai ekvatoriaus ilgis šioje projekcijoje sudaro *2πC*. Atskiru atveju koeficientas C gali apibūdinti cilindro pagrindo, į kurį projektuojamas rutulys, spindulio ilgį. Jeigu cilindras liečia ekvatorių, tai koeficientas *C* lygus elipsoido ar rutulio ekvatoriniam spinduliui. Jeigu cilindras kerta elipsoidą ar rutulį, tai koeficientas *C* lygus pagrindinės paralelės spinduliui.

2. Rodiklinė funkcija. $$x + iy = Ce^{-\alpha[q - i(\pi - 1)]}$$

Atskyrus realią ir menama dalis, gaunamos normalios kūginės lygiakampės projekcijos lygtys:

$$\rho = Ce^{-\alpha q} = \frac{C}{U^{\alpha}}; \quad \delta = \alpha(L - L_0); \quad x = -\rho \times cos\delta; \quad y = \rho \times sin\delta$$

Kur *α* ir *C* – koeficientai.

Parametras *α* – *m* proporcingumo koeficientas, susiejantis tiesius žemėlapio meridianus su jų ilgumos skirtumais (*0 < α < 1*). Iš pateiktų formulių matyti, kad kai *q = 0*, parametras *C* tampa ekvatoriaus projekcijos plokštumoje apskritimo spinduliu.

Kai *α = 1*, tai gaunama normalios azimutinės lygiakampės stereografinės projekcijos lygtis.

Laipsninės linijinės formulės.

Projekciją, kurios išraiška yra

$$x + iy = \sum_{k=0}^{N} a_k (il)^k$$

galima perrašyti kitaip, išskaidant ją į laipsnines linijines formules, kuriose dydis nuo pateikiamo taško platumos. Tokio pavidalo laipsnines linijines lygtis naudoja kuriant skersines cilindrines Gauso – Kriugerio ir UTM projekcijas. Gauso – Kriugerio projekcijoje neiškraipomas ašinio meridiano ilgis, o UTM projekcijoje jo dalinio mastelio ilgis lygus m_o = 0,9996. Pačiu bendriausiu pavidalu lygtis užrašoma taip:

$$x + iy = \sum_{k=0}^{N} (a_k + ib_k)(x' + iy')^k$$

Kur x′ ir y′ yra arba lygūs izometrinėms koordinatėms *q* ir *l* arba jos yra bazinės projekcijos koordinatės. Bazine gali būti azimutinė stereografinė projekcija.

Siekiant supaprastinti skaičiavimus, susijusius su laipsninėmis lygtimis, laipsnines lygtis transformuoja, atskiriant realią ir menama lygties dalis. Jas išreiškia šiomis formulėmis:

$$x = \sum_{k=0}^{N} (a_k P_k - b_k Q_k) \qquad y = \sum_{k=0}^{N} (a_k Q_k + b_k P_k)$$

Dydžiai *P* ir *Q* išskaičiuojami naudojant formules:

$$P_k = P_{k-1}P_1 - Q_{k-1}Q_1 \qquad Q_k = P_{k-1}Q_1 - Q_{k-1}P_1$$

$$P_0 = 1 \quad Q_0 = 0 \quad P_1 = x' \quad Q_1 = y'$$

Kai kuriose lygtyse stačiakampės koordinatė pateiktos naudodajant polinių koordinačių lygtis: direkcinį kampą *α* ir atstumą *ρ*. Tokiu atveju koordinačių skaičiavimo polinomas bus toks:

$$P_k = \rho^k cos(k\alpha) \qquad Q_k = \rho^k sin(k\alpha)$$

Projekcijos vaizdas priklauso nuo polinomo laipsnio bei jų koeficientų. Šios lygtys plačiai naudojamos kuriant lygiakampes kartografines projekcijas.

Plačiausiai naudojamos lygiakampės projekcijos pasižymi viena ypatybe, kurią į teoremos lygmenį 1853 metais iškėlė Pafnutijus Čebyševas (1821 – 1894), 1894 metais įrodė Dmitrijus Gravė (1863-1939). Teorema skelbia, kad geriausia lygiakampė kartografinė projekcija yra ta, kurios visose periferinėse srityse mastelis yra pastovus. Visos projekcijos, kurios remiasi tokia nuostata, vadinamos Čebyševo projekcijomis. Šiose projekcijose visose žemėlapio dalyse mastelis yra artimas 1. Žemėlapį rėmina izokola, turinti didžiausią dalinį mastelį. Kartografuojamos teritorijos centre mastelis turi mažiausias reikšmes.

Lygiakampėse projekcijose dalinis ploto mastelis lygus $p = m^2$, o jo logaritmas lygus $\ln p = 2 \ln m$. Tai reiškia, kad jeigu mastelis m mažiausiai nukrypsta nuo 1, tai dydžiai $\ln m$ ir $\ln p$ mažiausiai nukrypsta nuo 0. Visa tai rodo, kad Čebyševo projekcijose plotų iškraipymas yra minimalus ir artimas 0. Tarp lygiakampių projekcijų Čebyševo projekcijos yra labiausiai artimos lygiatarpėms projekcijoms.

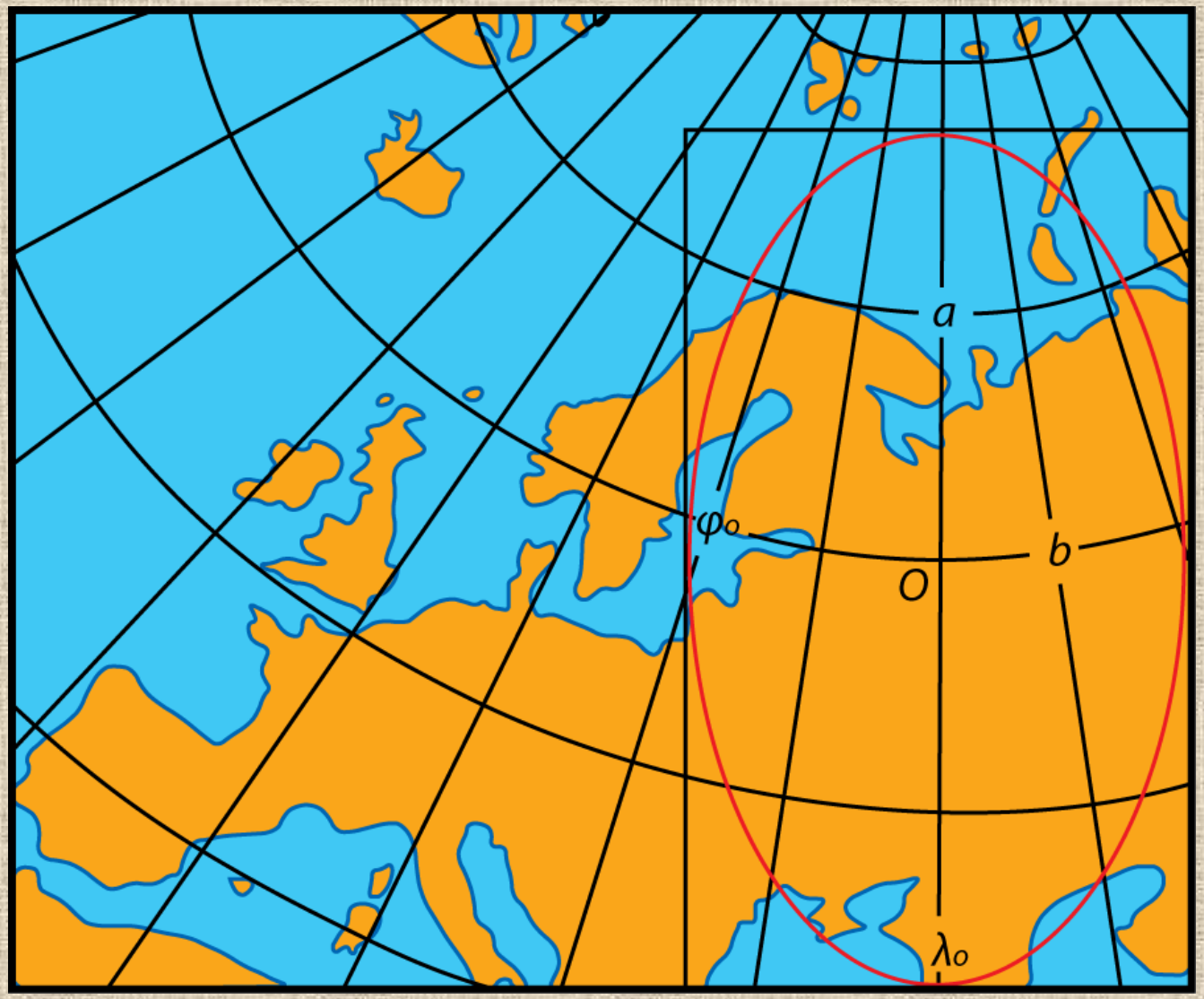
Čebyševo teorema turi svarbią teorinę ir praktinę reikšmes. Ją remiantis dažniausiai parenkamos projekcijos. Azimutinėse projekcijose izokolos turi koncentriškų apskritimų, sutampančių su paralelėmis arba almukantaratais, formą, kas rodo, kad azimutinės projekcijos geriausiai tinka ovalinėms teritorijoms kartografuoti. Normaliose kūginėse ir cilindrinėse projekcijose izokolos taip pat sutampa su paralelėmis. Tai reiškia, kad teritorijoms, ištęstoms paralelių (almukantaratų) kryptimi Čebyševo projekcijos taip pat yra tinkamiausios.

Naudojami kiekybiniai Čebyševo projekcijos konstravimo metodai yra paremti dviejų uždavinių sprendimu:

Remiantis nustatytu daliniu masteliu ieškomi iškraipymo rodikliai visame žemėlapio plote.

Remiantis nustatytu daliniu masteliu skaičiuojamos lygiakampių projekcijų koordinačių taškų sankirtos.

Sprendimų lygtys yra labai sudėtingos. Jų sudėtingumas padidėja dar, jeigu teritorijos kontūras yra vingiuotas. Dažniausiai tokia vingiuota linija generalizuojama ir jai nustatomas izokolų forma. XIX – XX amžiais buvo sukurta nemažai lygiakampių kartografinių projekcijų, kuriose izokolų kontūrai buvo derinami prie kartografuojamų teritorijų siluetų – priderintos kartografinės projekcijos. Plačiausiai žinomos olando Šarlio Šolso (Charles Mathieu Schols, 1849 – 1897), prancūzo Žano Laborde (Jean Laborde), amerikiečio Osborno Milerio (Osborn Maitland Miller, 1897 – 1979). Viena plačiausiai naudojamų priderintųjų projekcijų yra Lagranžo projekcija. Ji tinkama kartografuoti visoms Žemės vietoms, išskyrus poliarines sritis., kadangi ties ašigaliais projekcija netenka lygiakampiškumo savybių. Juos tikslingiausia kartografuoti normalioje stereografinėje projekcijoje.



P.Čebyševo patobulinta lygiakampė Lagranžo projekcija. Optimaliausią kartografuojamos teritorijos vaizdą ribojaelipsinė izokola, kurios centras yra taške O, a ir b yra jos pusašės.

Lygiakampėje Lagranžo projekcijoje Žemės paviršiaus vaizdas pateikiamas apskritime, kurį riboja du meridianai ($\lambda = \pm 180^o$). Jų padėtis nustatoma nuo vidurinio meridiano – tiesės. Skaičiavimams naudojamos šios lygtys:

$$x = \frac{k \times sin\delta}{1 + cos\lambda' \times cos\delta'} \quad y = \frac{k \times sin\lambda' \times cos\delta}{1 + cos\lambda' \times cos\delta} \quad \lambda' = \alpha\lambda \; tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\delta}{2}\right) = \beta U^{\alpha}$$

Šių formulių X ašis nukreipta išilgai viduriniojo meridiano – tiesės- į šiaurę , o Y ašis – išilgai paralelės – tiesės – į rytus. Lygtyje naudojami trys parametrai *α*, *β* ir *k*, kurie lemia projekcijos savybes ir pobūdį.

Toliau pateikiamas Lagranžo priderintosios projekcijos algoritmas. Žemėlapyje numatomas centrinis taškas 0 (φ_o, λ_o). Iš šio taško brėžiama elipsinė izokola, kurios pusašės yra *a* ir *b*. Pusašė sutapatinimas su meridiano kryptimi, pusašė b – su paralelės.

Žemėlapyje vertinamos laipsninės pusašių reikšmės: a – platumos, b – ilgumos. Pavyzdžiui a = 17º, b = 21º. Tuomet skaičiuojamas parametras *α*:

$$\alpha^2 = 1 + \frac{1 - n^2}{1 + n^2} \times cos^2\varphi_0 \qquad n = \frac{b}{a}$$

Parametras *α* yra labai svarbus. Jis nustatomas remiantis izokolos, ribojančios kontūrą, pusašėmis. Izokolos formos priklauso nuo parametro *α*:

$\alpha > 1$ – izokolos yra ovalai, ištęsti išilgai meridianų.

$\alpha = 1$ – izokolos yra apskritimai.

$\alpha < 1$ – izokolos yra ovalai, ištęsti išilgai paralelių.

$\alpha = 0$ – izokolos yra lygiagrečios ekvatoriui tiesės.

Parametras β skaičiuojamas naudojant lygtį:

$$\beta = \frac{\alpha + sin\varphi_0}{\alpha - sin\varphi_0} \times U_0^{-\alpha}$$

Parametras β nurodo Lagranžo projekcijoje vienintelės paralelės, kuri yra tiesė, platumą. Likusios paralelės yra apskritimų lankai. Tiesinės paralelės δ = 0, Jos platuma φ_p nustatoma remiantis formule:

$$tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_p}{2}\right) = \sqrt[\alpha]{\beta}$$

Kai β = 1, tai ekvatorius bus tiesė.

Parametras *k* yra išorinio meridiano apskritimo spindulys. Jo ilgis yra lygus pusei vidurinio meridiano arba pusei nuotolio tarp ašigalių projekcijoje. Dydis *k* skaičiuojamas remiantis formulėmis:

$$k = \frac{m_0 \times r_0}{\alpha}(1 + sec\delta_0) \qquad tg\frac{\delta_0}{2} = \frac{1}{\alpha} sin\varphi_0$$

Skaičiuojant parametrą k būtina atsiminti, kad m_0 yra centrinio žemėlapio taško O (φ_0, λ_0) mastelis. Jis prilyginamas 1 arba jo dydžio nustatymui galima naudoti Vladimiro Kavraiskio formulę. Šioje formulėje naudojamas ribojančios elipsinės izokolos ašių susikirtimo kampą dalijantis pusiau skersmuo. Išreiškus a ir b pusašes radianais, o minėtos izokolos skersmenį per jo spindulį, gaunama formulė:

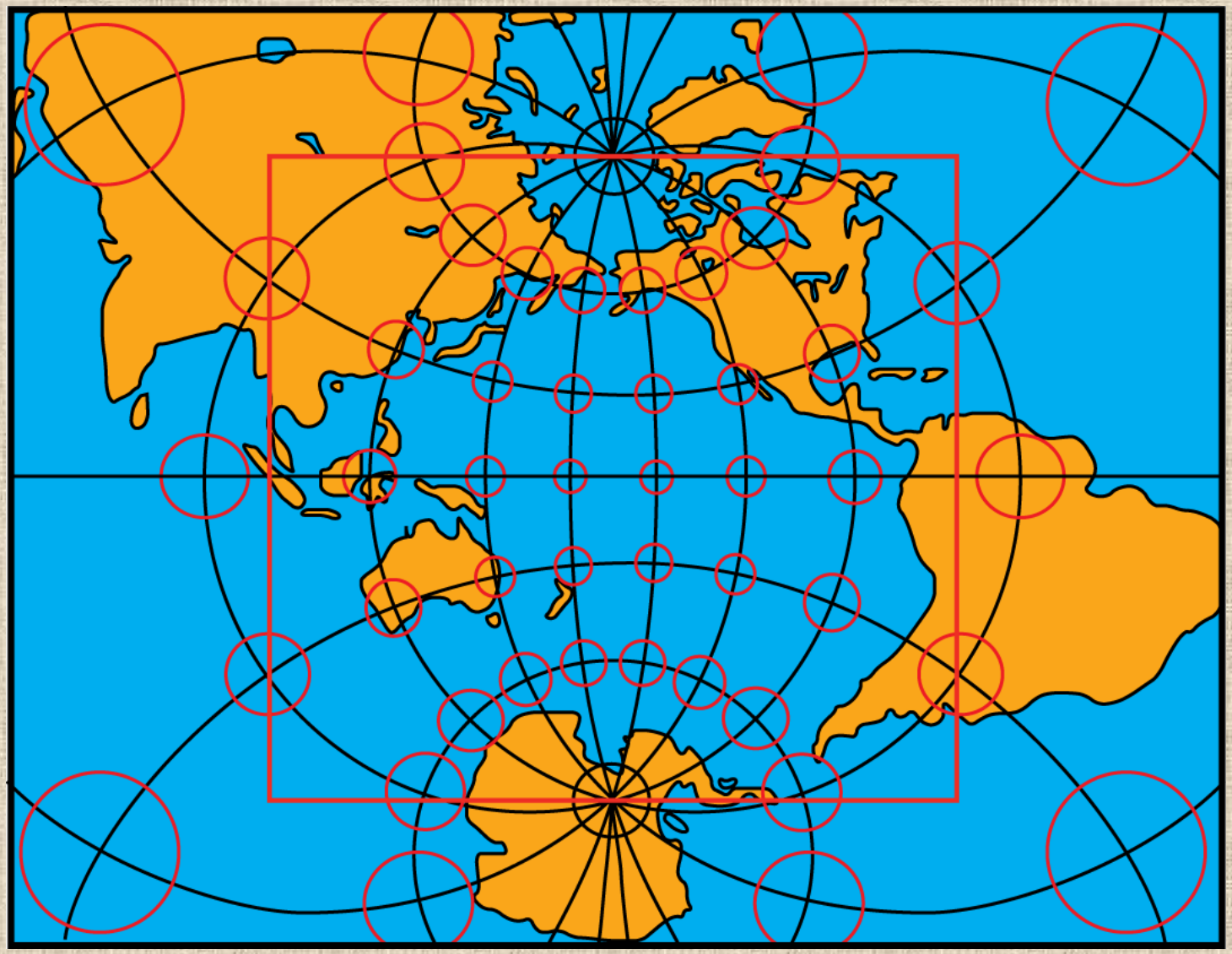
$$m_0 = 1 - \frac{a^2 \times b^2}{4(a^2 + b^2)}$$

Remiantis šia metodika sukurtos projekcijos pateiktos toliau esančiuose paveiksluose. Šiuose paveiksluose taip pat nubrėžti stačiakampiai į kuriuos įbrėžtos elipsinės izokolos. Pirmame paveiksle aiškia matyti, kad apskritimai, kurių skersmuo gaublio paviršiuje yra vienodas už stačiakampio ribų yra keleriopai didesni. Stačiakampio viduje apskritimai yra su mažiausiais iškraipymais. Ribojančioje izokoloje dalinis ilgių mastelis m = 1,350. Minimalūs iškraipymai yra centriniame projekcijos taške ir siekia m_0 = 0,675.

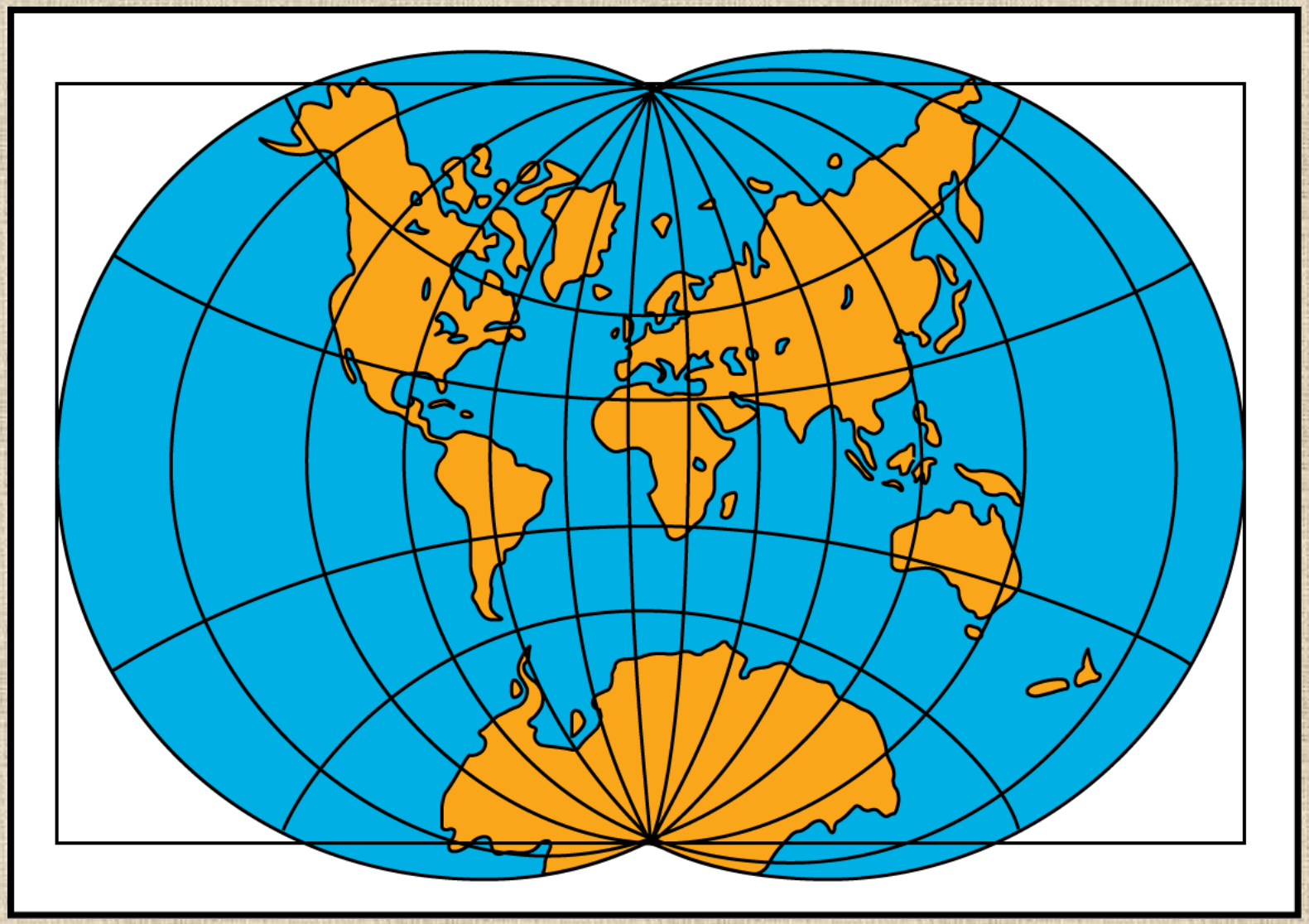
Kitame paveiksle pateiktas pasaulio žemėlapis, kurio izokolų pusašės lygios a = 90º, b = 180º, o Lagranžo projekcijų parametrai α = 0,632, β = 1, m_o= 0,507. Tikslesni skaičiavimai rodo, kad dalinis ilgių mastelis centriniame žemėlapio taške turėtų būti 10% didesnis. Visi skaičiavimai, kurie aprašyti remiantis šia metodika turi būti vertinami kaip preliminarūs. Galutinis projekcijos konstravimas vykdomas atlikus jos parametrų patikslinimą.

Žemėlapio lapai dažniausiai turi stačiakampio formą. Čebyševo projekcijos, kurioje izokolos įgauna taisyklingą poligonalinę formą (suapvalinti stačiakampio kampai) sukūrė Džonas Snyderis (John Snyder) 1984 metais. Toliau esančiame paveiksle pateikta ši projekcija, kurioje kartografuota JAV teritorija. Šalies teritoriją riboja praktiškai stačiakampė izokola, kurios dalinis ilgių mastelis yra 1,01083. Arčiau centro daliniai ilgių masteliai lygūs 1, o pačiame centre – 0,989. Projekcijos pagrindu pasirinkta azimutinė stereografinė projekcija. Daugelis projekcijos parametrų lygūs 0, išskyrus tik šiuos dydžius:

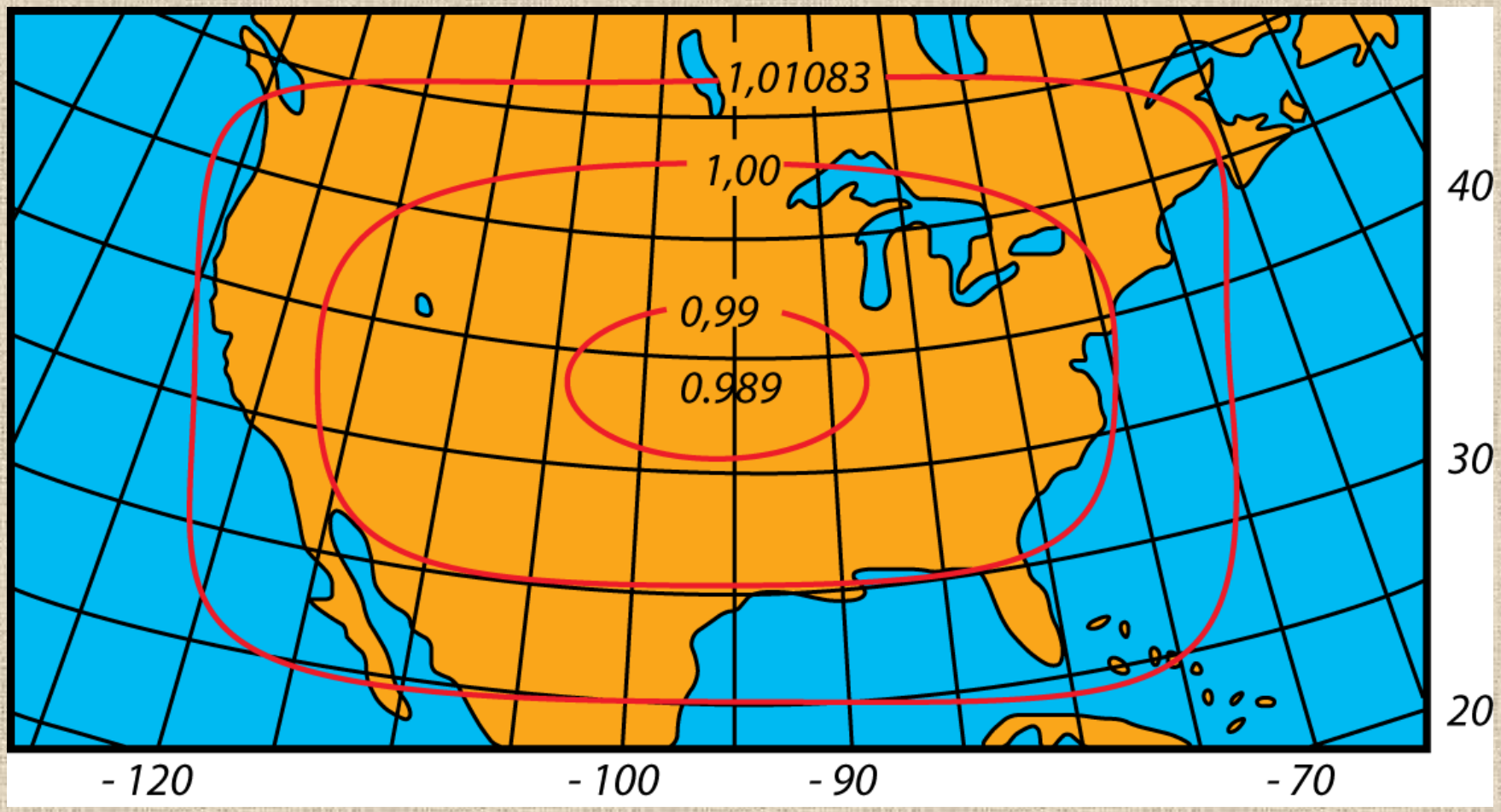
$$a_1 = 0{,}988, \qquad a_3 = -0{,}050909, \qquad a_5 = 0{,}085528$$



P.Čebyševo patobulinta Lagranžo lygiakampė Ramiojo vandenyno projekcija. Mažiausi iškraipymai yra raudoname stačiakampyje.



Pasaulio žemėlapis, sudarytas adaptuotoje lygiakampeje Lagranžo projekcijoje.



Optimaliausias JAV žemėlapis, sudarytas lygiakampėje projekcijoje. Vaizdą ribojanti dalinio mastelio iškraipymų izikola turi beveik stačiakampio formą.

Lygiatarpių projekcijų konstravimas

Plačiai lygiatarpių projekcijų konstravimą nagrinėjo Johanas Heinrichas Lambertas, Maksas Ekertas, Karlas Molveidė, Heinrichas Christianas Albersas, Vladimiras Kavraiskis, Levas Bugajevskis.

Pagrindinė sąlyga, konstruojant lygiatarpes projekcijas yra ta, kad dalinis plotų mastelis turi būti lygus vienetui: *p* = 1. Įvertinant Gauso koeficientų išraiškas, sukimosi elipsoidui ši sąlyga turi atitikti reikšmę *h* = *H*.

$$x_B y_L - y_B x_L = M \times r$$

Rutuliui ši sąlyga išreiškiama taip: $x_\varphi y_\lambda - y_\varphi x_\lambda = R^2 cos\varphi$

Tačiau šių lygčių, kad jos vienareikšmiškai tenkintų sąlygą *p* = 1 nepakanka, todėl skaičiavimams naudojamos ir kitos lygtys. Elipsoidui jos yra sudėtingesnės, tuo tarpu gaubliui – paprastesnės. Toliau pateikiamose lygtyse taikomi tokie simboliai:

***P* – elipsoido paviršiaus plotas, apribotas ekvatoriumi, platumos paralele B ir dviem meridianais, ilgumos skirtumas tarp kurių yra 1 radianas.**

***S* – meridiano lanko ilgis nuo ekvatoriaus iki platumos paralelės B.**

***C* – koeficientas parodantis, koks yra cilindro, į kurį projektuojamas elipsoido paviršius, pagrindo spindulio ilgis. Daroma prielaida, kad azimutinių ir kūginių projekcijų koordinatės bus skaičiuojamos pagal formules**

$$x = d - \rho \times cos\delta; \quad y = \rho \times sin\delta.$$

11 lentelė. Lygiatarpių projekcijų pradinės sąlygos ir bendrosios formulės.

Klasės	Kartografinių projekcijų grupės	
	Azimutinės (α = 1), kūginės (0 < α < 1)	Cilindrinės (α = 0)
Bazinės	$\varepsilon = 0;\ \alpha\rho\rho_B = -Mr;$ $\delta = \alpha(L - L_0);\ \ \rho^2 = \frac{2}{\alpha}(C - P);$ $n = \frac{\alpha\rho}{r};\ \ m = \frac{1}{n};\ \ p = 1;\ \ tg\left(\frac{\pi + \omega}{4}\right) = a$	$\varepsilon = 0;\ \ Cx_\varphi = R^2 cos\varphi;$ $x = \frac{R^2}{C} sin\varphi;\ \ y = C(L - L_0);$ $n = \frac{C}{r};\ \ m = \frac{1}{n};\ \ p = 1;$ $tg\left(\frac{\pi + \omega}{4}\right) = a$
Pseudoazimutinės, Pseudokūginės, pseudocilindrinės	$\rho\rho_B\delta_L = -Mr;\ \ \rho\delta_L = r;$ $\delta = \frac{r}{\rho}(L - L_0);\ \ \rho = C - S;\ \ tg\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}tg\varepsilon$ $n = 1;\ \ m = \frac{1}{cos\varepsilon};\ \ p = 1;$ $tg\varepsilon = (L - L_0)\left(sinB - \frac{r}{\rho}\right);$	$x_\varphi y_\lambda = R^2 cos\varphi;$ $x = \int_0^\varphi x_\varphi d\varphi;$ $y = \frac{R^2 cos\varphi}{x_\varphi}(\lambda - \lambda_0);$ $n = \frac{y_\lambda}{r};\ \ m = \frac{1}{(n \times cos\varepsilon)};$ $p = 1;$ $tg\varepsilon = -\frac{y_\varphi}{x_\varphi};$ $tg\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 n^2} - 2$
Poliazimutinės, polikūginės, policilindrinės	$\rho d_B\delta_L cos\delta - \rho\rho_B\delta_L = Mr\ \ \ p = 1;$ $d = d(B);\ \ \rho = \rho(B);$ $\delta = -\frac{Mr(L - L_0)}{\rho\rho_B} + \frac{d_B sin\delta}{\rho_B};$ $tg\varepsilon = -\frac{d_B sin\delta + \rho\delta_B}{d_b cos\delta - \rho_B};$ $n = \frac{\rho\delta_L}{r};\ \ m = \frac{1}{n \times cos\varepsilon};$ $tg\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 - 2}$	

***Ortogonalinės lygiatarpės projekcijos*. Papildoma sąlyga lygiatarpėms projekcijoms yra kartografinio tinklo orogonolališkumas:** $\varepsilon = 0$

Svarų indėlį, nagrinėjant lygiatarpių ortogonalinių kartografinių projekcijų sąlygas įnešė šveicaras Leonardas Eileris (Leonhard Euler, 1707 – 1783). Ortogonalinės lygiatarpės projekcijos gali būti azimutinė, kūginės ir cilindrinė. Jų sudarymui pakanka patenkinti sąlygą $p = 1$.

Azimutinėse projekcijose ($\alpha = 1$) projektavimo plokštuma gali liesti arba kirsti elipsoidą (gaublį). Normalau projektavimo atveju kertančioji plokštuma sutaps su paralele B_k. Tuo atveju plotų mastelis bus pastovus, tačiau nelygus 1. Daliniai masteliai ρ, m ir n, kurie skaičiuojami remiantis formulėmis, pateiktomis 8 lentelėje, turi būti pakeisti padauginus juos iš koeficiento k.

$$k = \frac{r_k}{\rho_k}$$

Tokiu būdu ties paralele, kurią kerta plokštuma, mastelis bus lygus pagrindiniam masteliui, o dalinis ploto mastelis bus lygus $k = k^2$.

Pseudoazimutinės ir pseudokūginės projekcijos. Kuriant šias projekcijas, iškeliamos dvi sąlygos: $p = 1$, $n = 1$. Tai leidžia sukurti tokias projekcijas, kuriose neiškraipomi plotai ir paralelių ilgiai. Vidurinio meridiano ilgis taip pat neiškraipomas ($m_o = 1$).

Pseudocilindrinės projekcijos. Šios projekcijos paprastai sudaromos gaubliui. Jose lygiatarpiškumo savybė išreiškiama tokia priklausomybe:

$$x_\varphi y_\lambda = R^2 \times cos\varphi$$

Projekcijos lygtis gaunama atlikus integravimą: $$y_\lambda = \frac{R^2 \times cos\varphi}{x_\varphi}$$

Lygiatarpės pseudocilindrininės projekcijos vaizdas priklauso nuo platumos abscisių išvestinės. Pavyzdžiui, $x_\varphi = R$, tuomet projekcijai apibūdinti taikomos šios lygtys:

$$x = R\varphi; \quad y = \lambda \times Rcos\varphi; \; n = 1; \; m = \frac{1}{cos\varepsilon}; \; tg\varepsilon = \lambda \times sin\varphi$$

Tai lygiatarpės pseudocilindrinės sinusoidinės Sansono projekcijos lygtys.

Poliazimutinės ir polikūginės projekcijos. Šioms projekcijoms be lygiatarpiškumo (*p = 1*) sąlygos, pateikiamos ir kitos:

1. Paralelių centrų padėtis ant vidurinio meridiano turi atitikti sąlygą *d = d(B).*

2. Paralelių spinduliai turi atitikti sąlygą *p = p(B).*

Rusų kartografė Tatjana Tolstova 1981 metais lygiatarpei poliazimutinei gaublio projekcijai pritaikė panaudojo dydžius:

$$d = \rho + \frac{\pi}{2 - Z}; \quad \rho^2 = 2(1 - cosZ)$$

1986 metais Levas Bugajevskis lygiatarpei polikūginei elipsoido projekcijai panaudojo dydžius:

$$d = N \times ctgB + S; \quad \rho = N \times ctgB$$

Rusų mokslininko Grigorijaus Meščiariakovo nuomone lygiatarpėms projekcijoms netaikoma Čebyševo teorema, tačiau jas kuriant siekiama, kad iškraipymų izokolos atitiktų kartografuojamos teritorijos kontūrus, tai yra būtų artimos stačiakampiui, elipsei ar apskritimui.

Lygiatarpės projekcijos – tai projekcijos kuriose mastelis vien iš pagrindinių krypčių (paralelių ar meridianų) yra pastovus. Praktinį pritaikomumą turi ortogonalinės lygiatarpės elipsoido ar gaublio projekcijos. Jose pagrindinės kryptys sutampa su meridianų ar paralelių kryptimis, o ekstremaliais yra daliniai m ir n masteliai. Praktikoje plačiau taikomos lygiatarpės azimutinės, kūginės ir cilindrinės projekcijos.

Čebyševo teoremos įrodymai lygiakampėms projekcijoms taip pat tinka ir ortogonalinėms lygiatarpėms projekcijoms, kur pagrindinė kryptis sutampa su meridianų kryptimi. Jas konstruojant stengiamasi, kad išorinė izokola atitiktų kartografuojamos teritorijos kontūrus.

Lygiatarpės meridianų kryptimi projekcijos. Šios projekcijos turi plačiausią praktinį pritaikymą. Pagrindinė sąlyga, kad meridiano mastelis būtų nekintamas: 11 lentelėje pateiktos suvestinės šį reikalavimą atitinkančios formulės azimutinėms, kūginėms ir cilindrinėms projekcijoms. Formulėse *S* atitinka meridiano lanko tarp ekvatoriaus ir platumos paralelės *B* ilgį, o *C* dydis yra projekcijos parametras.

Kuriamos lygiatarpės projekcijos su pastoviu daliniu masteliu, kuri nelygus 1. Toks mastelis azimutinėse projekcijose yra tada, kai projektuojamoji plokštuma kerta, o ne liečia gaublį ar elipsoidą. Plokštuma kerta sferą ties pagrindine paralele B_k. Šiuo atveju, naudojant pateiktas formules dydžių ρ, m, n skaičiavimui, kada $\alpha = 1$, gautus rezultatus būtina padauginti iš koeficiento, kuris nustatomas taip:

$$k = \frac{r_k}{\rho_k}$$

Meridianų kryptimi apibendrintos projekcijos. Nikolajus Urmajevas sukūrė meridianų kryptimi apibendrintą kūginę projekciją gaubliui. Tokioje projekcijoje, palyginus su įprastomis kūginėmis projekcijomis, sumažinti ir tolygiau paskirstyti iškraipymo dydžiai. Levas Bugajevskis meridianų kryptimi apibendrintas kartografines projekcijas kūrė sukimosi elipsoidui. Atvirkštinio matematinės kartografijos uždavinio sprendimas, esant sąlygoms kai $\varepsilon = 1$ ir $m = 1$ leido sukurti koordinačių skaičiavimo formules:

$$x = -(C - S) \times cos\delta; \quad y = (C - S) \times sin\delta; \quad m = 1; \quad n = \frac{\alpha(C - S)l}{r}$$

Vidurinio meridiano atžvilgiu simetriškam kartografiniam tinklui tinkamos šios formulės:

$$l = 1 + b_2L^2 + b_4L^4 \ldots; \quad \delta = \alpha\left(L + \frac{b_2}{3}L^3 + \frac{b_4}{5}L^5 + \cdots;\right)$$

Asimetriškam tinklui formulės yra kiek kitokios:

$$l = 1 + b_1L + b_2L^2 + b_3L^3 \ldots; \quad \delta = \alpha(L + \frac{b_1}{2}L^2 + \frac{b_2}{3}L^3 + \frac{b_3}{4}L^4 + \cdots)$$

Kur S - meridiano lanko ilgis, skaičiuojamas nuo ekvatoriaus.

L – ilguma, skaičiuojama nuo vidurinio meridiano.

C, α, b_i – projekcijos parametrai. Parametrų reikšmės gaunamos suteikiant paralelėms dalinius mastelius arba kartografuojamos teritorijos kontūre parelelės mastelį padarant pastoviu: $n = const$.

11 lentelė. Pagrindinės lygiatarpių projekcijų formulės.

Azimutinės (α=1) ir kūginės (0<α<1)	Cilindrinės (α=1)
$\rho_B = -M$ $\rho = C - S;\ \ \delta = \alpha(L - L_0);$ $m = 1;\ \ n = \frac{\alpha\rho}{r};\ \ p = n;$ $a = m;\ \ b = n\ arba\ a = n; b = m$ $sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}$	$x_B = M;\ \ x = S;\ \ y = C(L - L_0)$ $m = 1;\ \ n = \frac{C}{r};\ \ p = n;$ $a = m;\ \ b = n\ \ araba\ a = n;\ \ b = m;$ $sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}$

Laisvosios cilindrinės projekcijos su nustatytu iškraipymų pasiskirstymu. Tokias projekcijas yra pasiūlęs Nikolajus Urmanovas. Viena jų – normali cilindrinė prėjekcija, simetriška ekvatoriaus atžvilgiu. Mastelis meridianų kryptimi yra aiškia fiksuotas ir gali būti aprašomas daugianariu:

$$m = \frac{x_\varphi}{R} = \frac{dx}{Rd\varphi} = a_0 + a_2\varphi^2 + a_4\varphi^4 + \cdots.$$

Nežinomi koeficientai gali būti išskaičiuoti, kelioms paralelėms suteikus dalinių mastelių m reikšmes. N. Urmajevas pasiūlė tokius dalinius mastelius taikyti trims platumoms: $\varphi_1 = 0^o$, $\varphi_2 = 60^o$, $\varphi_3 = 80^o$. Jose daliniai mastelia bus lygūs $m_1 = 1{,}0$, $m_2 = 1{,}5$, $m_3 = 2{,}0$. Tai leidžia tris nežinomus koeficientus išskaičiuoti sprendžiant tris linijines lygtis arba naudojant interpoliacinę Njutono formulę su individuliais skirtingumais. Atlikus integravimą, x (abscisių) ašies formulė, o ordinačių y reikšmės skaičiuojamos taikant bendrąją cilindrinių projekcijų formulę:

$$x = R\left(a_0\varphi + \frac{a_2}{3}\varphi^3 + \frac{a_4}{5}\varphi^5\right); \quad y = R(\lambda - \lambda_0)$$

Kartografinių projekcijų optimizacija

Viena pagrindinių, kurias sprendžia kartografijos mokslas – tai tinkamiausių projekcijų sukūrimas. Kartografijos veikaluose kartais rašomi teiginiai, kad kartografinių projekcijų sukurta daug, net pernelyg daug. Tačiau tobulėjančios kartografinių vaizdų kūrimo technologijos verčia kurti vis naujas projekcijas, geriausiai atitinkančias praktinius reikalavimus. Kiekviena kartografinė projekcija turi savus privalumus ir trūkumus. Universalių tobulų, tinkančių visiems projektavimo atvejams net ir teoriškai negalima sukurti. Todėl kyla tinkamiausios projekcijos problema.

Tinkamiausia projekcija vadinama projekcija, kuri optimaliausiai tenkina reikalavimų visumą, susijusią su konkretaus žemėlapio paskirtimi.

Uždaviniai, susiję su tokių projekcijų paieška realizuojami nuo XIX amžiaus pradžios. Rusų mokslininkas Pafnutijus Čebyševas sukūrė metodą optimaliausioms lygiakampėms projekcijoms nustatyti. Britų astronomas Džordžas Bidelis Eiris (George Biddel Airy, 1801 – 1892) sukūrė metodą minimaliems iškraipymams įvertinti ir leidžiantį parinkti tinkamiausią projekciją konkretiems atvejams.

Tinkamiausių projekcijų parinkimas susijęs su iškraipymo dydžių įvertinimu. Kita vertus, iškraipymo dydžiai ne kiekvieną kartą būna lemiantys. Ypač tai būdinga kuriant teminius žemėlapius. Jų atveju svarbesniu tampa žemėlapių vaizdumas, leidžiantis išryškinti specifinius kartografuojamų reiškinių bruožus. Tokiais atvejai projekcija traktuojama kaip svarbus žemėlapio dizaino elementas.

Parenkant tinkamiausią projekciją visada atsižvelgiama į reikalavimų visumą:

1. Kartografuojamos teritorijos dydis ir geografinė padėtis.

2. Specifiniai temos reikalavimai, susiję, pavyzdžiui, su ekvatorinių ir poliarinių sričių vaizdavimu viename žemėlapyje, kartografuojamo reiškinio zoniškumo pateikimas, mastelio nevienodumas atskirose žemėlapio dalyse ir panašiai.

3. Dizaino kriterijai, susiję su vidurinio meridiano ir ekvatoriaus padėtimi, atitinkamu žemynu išdėstymu, polių ir poliarinių regionų pateikimu, meridianų ir paralelių kreivumao atitikimu.

4. Žemėlapio paskirtimi (demonstraciniai, informaciniai, elektroniniai, specialūs), kuomet atsižvelgiama į konkrečių žemėlapių kūrimo tradicijas, vartotojų kompetenciją, analizės būdus.

5. Iškraipymų pobūdį, dydžius, pasiskirstymą.

Daugelis šių reikalavimų yra sunkiai formalizuojami, todėl tinkamiausios projekcijos kuriamos priartėjimo būdu, naudojant interaktyvius metodus.

Šiuo metu aiškiausiai formalizuoti reikalavimai, susiję su iškraipymo dydžiais. Atranka vykdoma tokiu nuoseklumu:

Nustatoma projekcijos klasė → iškraipymo kriterijai → tinkamiausių parametrų, atitinkančių reikalavimus, paieška.

1977 metais čekas Vladislovas Hojovecas (Vladislav Hojovec) pasiūlė kartografinių projekcijų optimizacijos parinkimo eigą. Pasirinktos projekcijų klasės lygtys papildomos naujomis lygtimis su nežinomais parametrais, kuriuos būtina nustatyti. Pavyzdžiui:

$$x = x(\varphi, \lambda) + \Delta x(\varphi, \lambda); \quad y = (\varphi, \lambda) + \Delta y(\varphi, \lambda)$$

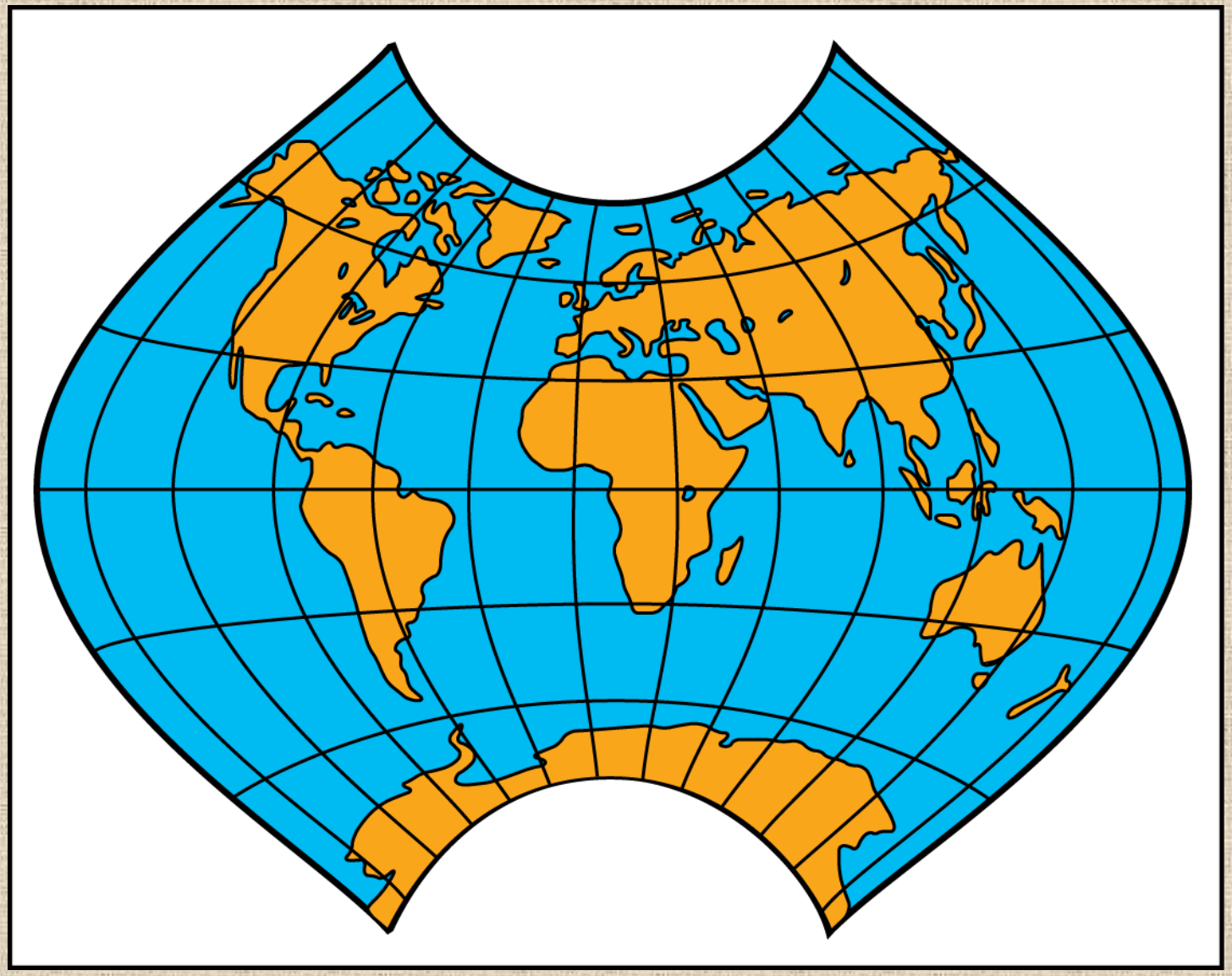
Dešinioji kiekvienos lygties pusė susideda iš dviejų dedamųjų: pirmoji – žinomos pirminės lygtys, antroji – priedas, kurį pasirinkus minimalizuojami iškraipymai. Hojovecas išnagrinėjo Sansono lygiatarpės pseudocilindrinės projekcijos lygtis, papildydamas jas kartografinio tinklo simetriją vidurinio meridiano ir ekvatoriaus atžvilgiu garantuojančiais polinomais. Kartu jis panaudojo ir Eirio variacinio kriterijaus minimalizavimo polinomo koeficientus:

$$I = \frac{1}{1} \iint [(a-1)^2 + (b-1)^2]\, d\varphi d\lambda.$$

Šios funkcijos minimalizacija atlikta plote, kurį riboja ekvatorius, 80º šiaurės platumos paralelė, vidurinis meridianas ir meridianas, 180º nutolęs nuo vidurinio meridiano. Įvertinant Sansono projekcijos simetriškumą, galima teigti, kad pasaulio žemėlapio iškraipymų minimalizacija atlikta teritorijoje, esančioje tarp ± 80º. Sansono projekcijoje dydis *I = 0,9398*. Naujoje projekcijoje *I = 0,2624*, tai yra 3,5 karto mažesnis. Naujoje projekcijos, kurios sferos spindulys *R* = 1, gautos tokios lygtys:

$$x = 0,839660\varphi - 0,044600\varphi^2 + 0,040118\varphi\lambda^2;$$

$$y = cos\varphi\lambda - 0,227240\lambda + 0,224915\varphi^2\lambda - 0,005347\lambda^3.$$



Optimizuota Sansono lygiaplotė pseudocilindrinė projekcija

97 paveiksle pateiktas žemėlapio maketas šioje projekcijoje. Tyrimai parodė, kad lokalūs sferos apkritimai (ratai), nubrėžti kartografinio tinklo linijų susikirtimo taškuose šioje projekcijoje yra beveik neiškraipyti. Deformacijos matomos tik žemėlapio pakraščiuose. Šioje projekcijoje ilgių iškraipymas yra 2 kartus, o formų kontūrų 4 kartus mažesni nei Sansono projekcijoje. Tačiau ši projekcija turi kitų trūkumų. Projekcija tapo nelygiatarpe. Ilgiai tapo 20% mažesni, o ašigaliai iš taškų virto didelio kreivumo lankais. Hojoveco sukurta projekcija ženkliai skiriasi nuo pradinio varianto – Sansono sinusoidinės pseudocilindrinės projekcijos.

1997 metais Peteris Laskovskis (Peter Laskowski) optimizavo projekciją, kurią pavadino trioptimalia. Jai sukurti jis panaudojo penktos eilės bisimetrinius polinomus, turinčius 9 parametrus. Parametrų reikšmės nustatytos minimalizuojant vidutinį kvadratinį nuokrypį w.

$$F = w_{ploto} \times E_{ploto} + w_{formos} \times E_{formos} + w_{ilgio} \times E_{ilgio}$$

Plotų, formos ir ilgio iškraipymai nustatyti remiantis šiomis formulėmis:

$$E_{ploto} = \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{N}(a_i b_i - 1)^2; \quad E_{formos} = \left(\frac{1}{N}\right)\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{a_i}{b_i} - 1\right)^2;$$

$$E_{ilgio} = \left(\frac{1}{QN}\right)\sum_{i=1}^{N}(d_i \times D_i)^2; \quad Q = \sqrt{\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} d_i^2\right) \times \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} D_i^2\right)}$$

Kur N – matavimų skaičius.

a, b – ekstremalūs daliniai ilgio masteliai.

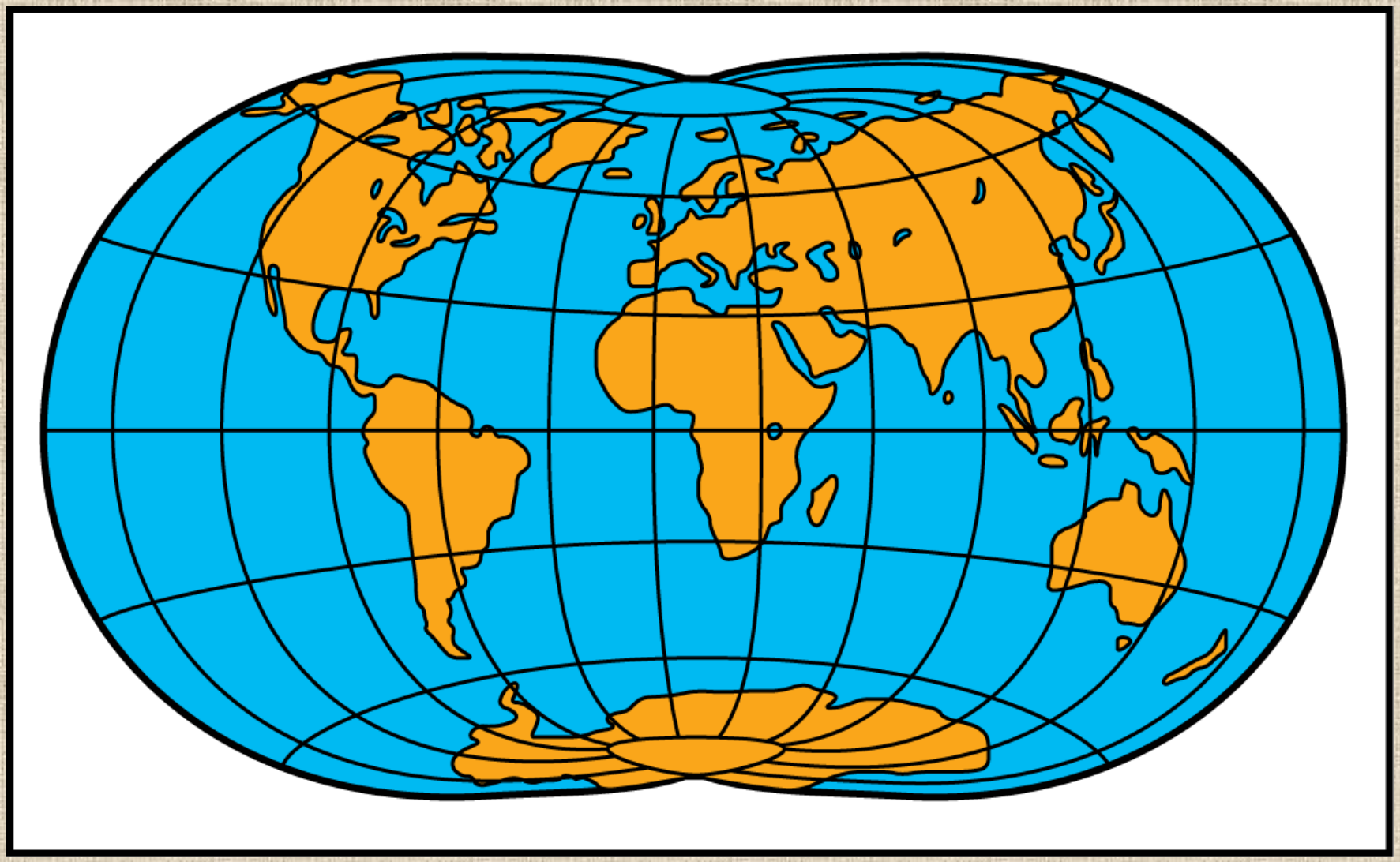
d – atstumai projekcijoje.

D – atitinkami atstumai rutulio paviršiuje.

Rutulio, kurio *R = 1*, X ašis nukreipta į šiaurę, o Y ašis – į rytus, projekcijos lygtys yra tokios:

$$x = 1,00384\varphi + 0,0802894\varphi\lambda^2 + 0,099890\varphi^3 + 0,000199025\varphi\lambda^4 - 0,02855\varphi^3\lambda^2 - 0,0491032\varphi^5;$$

$$y = 0,975534\lambda - 0,119161\varphi^2\lambda - 0,0143059\varphi^2\lambda^2 - 0,0547009\varphi^4\lambda.$$



P.Laskovskio tri-optimali projekcija. Iškraipymai mažiausi trimis kryptimis.

Projekcijos skaičiavimams pasirinkta 5000 taškų (N = 5000), kurie tolygiai išsklidę rutulio paviršiuje. Kampiniai atstumai tarp jų svyravo nuo 10º iki 40º. Skaičiavimuose taškų poros pasirinktos taikant atsitiktinumo principą. Pagrindinis reikalavimas projekcijai – kartografuojamos teritorijos vaizdumas. Projekcijoje nėra plotų persidengimo, sudėtingos kartografinio tinklo konfigūracijos, kontūrų transformacijos į linijas ar taškus. Subalansavus iškraipymus, pateiktas visas Žemės paviršius, o Antarktida išlaikė ovalinę formą. Tri- optimalioje projekcijoje Žemės paviršius pateiktas nepertrauktu vaizdu. Poliai nubrėžti kreivėmis. Poliarinių rajonų perspektyva sukuria sferiškumo iliuziją. Projekcijoje išlaikyta kartografinio tinklo simetrija ekvatoriaus ir vidurinio meridiano atžvilgiu. Ekvatoriuje pagrindinis mastelis yra pastovus.

Šioje projekcijoje plotai ir atstumai iškraipyti vienodai. Formų iškraipymai yra 2 kartus didesni nei Sansono projekcijoje. Centrinėje žemėlapio dalyje, apimančioje Afriką, Europą, dalį Azijos, Šiaurės ir Pietų Amerikos plotų iškraipymas yra 2 kartus didesnis nei Sansono projekcijoje, o ilgių ir formų iškraipymai yra beveik vienodi.