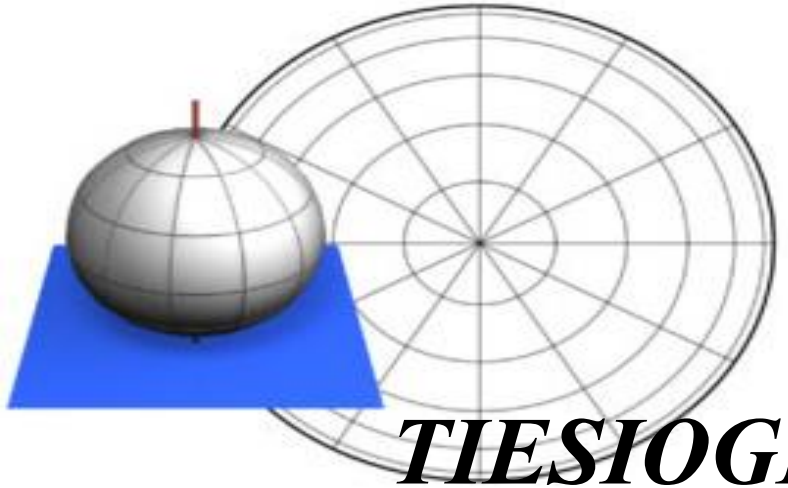
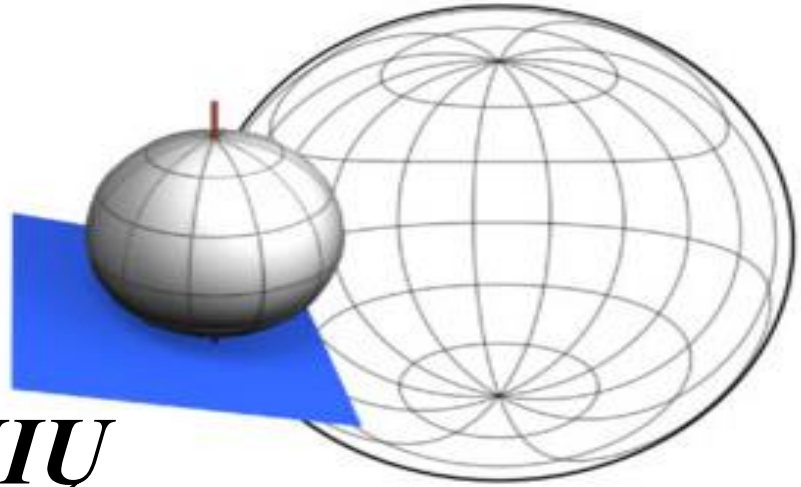
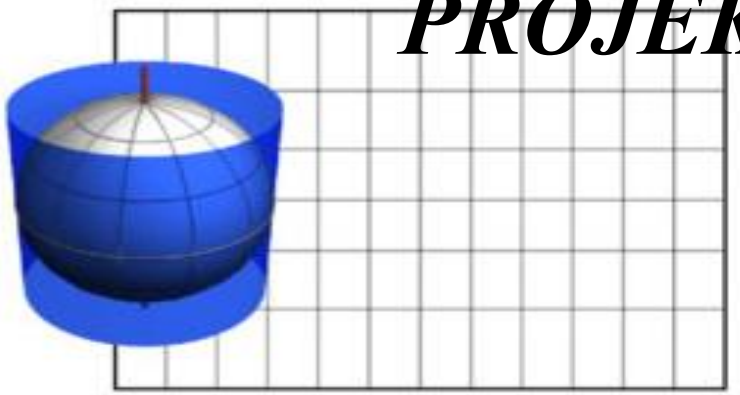
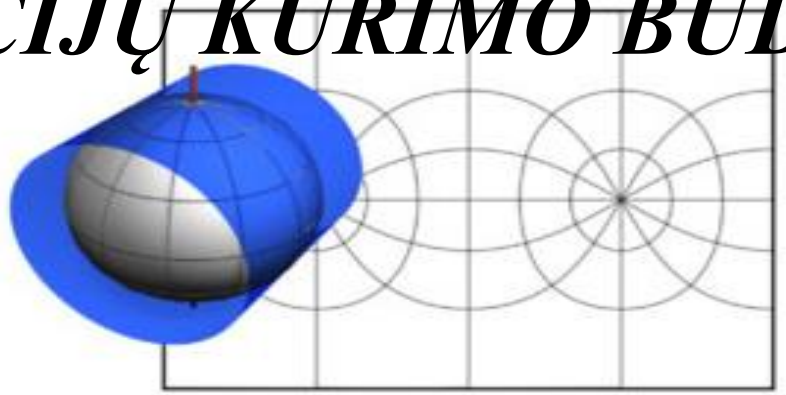
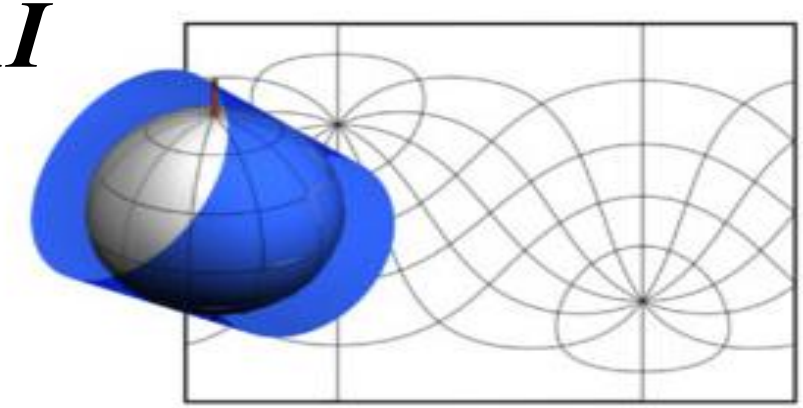
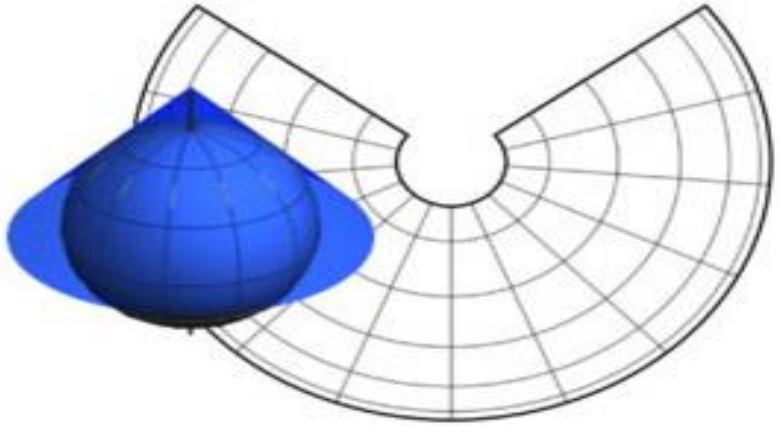
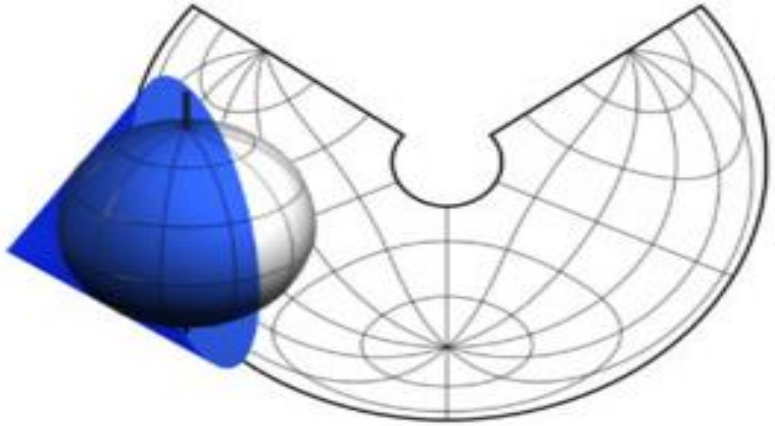
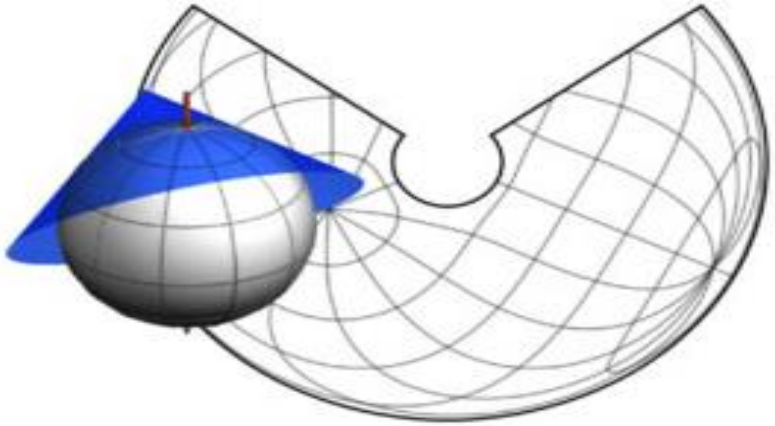
TIESIOGINIAI KARTOGRAFINIŲ PROJEKCIJŲ KŪRIMO BŪDAI



Tiesioginiai kartografinių projekcijų kūrimo būdai

Kartografinės projekcijos kuriamos sprendžiant tiesioginį arba atvirkštinį matematinės kartografijos uždavinį. Šiame skyriuje nagrinėjami tiesioginiai kartografinių projekcijų kūrimo būdai. Tai būdai, kurie paremti tiesioginio matematinės kartografijos uždavinio sprendimu. Sprendžiant tiesioginį matematinės kartografijos uždavinį pradžioje numatomas būsimos kartografinės projekcijos pirminis vaizdas (eskizas, kartografinio tinklo linijų pobūdis, projekciją aprašančios matematinės lygtys), o po to tyrimų būdu nustatomi įvairūs rodikliai, apibūdinantys vaizdo iškraipymą ir projekcijų savybes.

Kuriant kartografines projekcijas dažniausiai taikomi šie būdai:

1. Grafiniai kūrimo būdai.

2. Rutulio ar eliposoido perspektyvinio projektavimo būdai, nukreipti į:

1.1. projektavimą į plokštumą.

1.2. projektavimą į cilindro paviršių, kuris vėliau projektuojamas į plokštumą.

1.3. projektavimą į kūgio paviršių, kuris vėliau išskleidžiamas į plokštumą.

3. Projekcijų eskizų kūrimas ir jų analizė.

4. Įvairūs jau sukurtų projekcijų keitimo ir perdarymo būdai, kurių metu sukuriamos išvestinės projekcijos.

Didžioji dalis kartografinių projekcijų kuriamos taikant tiesioginius matematinės kartografijos būdus. Jų privalumas susijęs su kūrimo paprastumu.

Kartografinių projekcijų kūrimo būdai

- *Grafiniai kūrimo būdai*
- *Rutulio ar eliposoido perspektyvinio projektavimo būdai*
  - *projektavimas į plokštumą*
  - *projektavimas į cilindro paviršių, kuris vėliau projektuojamas į plokštumą.*
- *Esamų projekcijų keitimo ir perdarymo būdai – išvestinių projekcijų sudarymas*
- *Projekcijų eskizų kūrimas ir jų analizė*

Grafiniai projekcijų kūrimo būdai

Grafiniai kartografinių projekcijų kūrimo būdai, seniau buvę vieninteliai, šiuo metu svarbūs yra istoriniu ir metodologiniu aspektais. Kita vertus, jie naudojami ir dabar, kuriant naujas projekcijas.

Per ilgą laikotarpį sukurta daug būdų, grafiškai kuriant projekcijas.

Lengviausiai kuriama normali lygiatarpė cilindrinė projekcija. Jos kūrimui pakanka išvesti nustatytais tarpais horizontalias linijas ir joms statmenus vertikalus. Šiuo atveju abscisių ašis yra vertikali ir sutapatinama su vidurinio meridianu, o ordinačių ašis – į dešinę pusę ekvatoriaus kryptimi. Ilgumos atskaitos atliekamos nuo vidurinio meridiano: į dešinę – teigiamos (rytų ilguma), į kairę – neigiamos (vakarų ilguma). Normalios lygiatarpės cilindrinės projekcijos, kurios rutulio spindulys lygus R (ilguma ir platuma išreiškiama radianais) lygtys yra tokios:

$$x = R_{\varphi}; \qquad y = R_{\lambda}$$

Yra gana daug būdų azimutinėms projekcijoms kurti. Normali lygiatarpė azimutinė projekcija, kurios rutulio spindulys R kuriama brėžiant lygiais tarpais koncentriškus apkritimus ir nustatant jų spindulius. Kiekvieno koncentriško apskritimo spindulys lygus:

$$r = R \times Z$$

kur Z – zenitinis taško nuotolis.

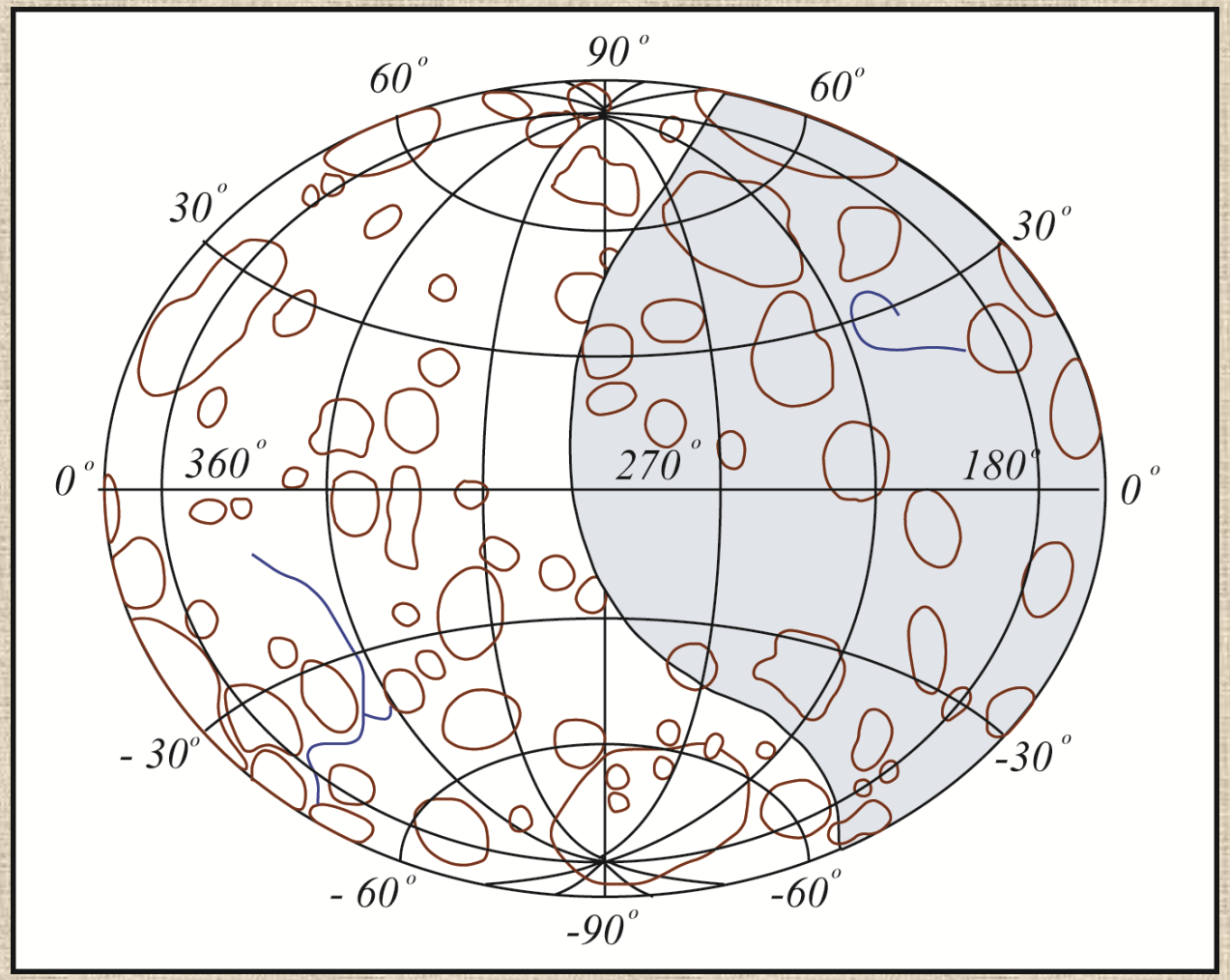
Normalaus projektavimo atveju koncentriški apskritimai atitinka paraleles, o jų spinduliai – meridianus. Vidaus kampai tarp meridianų atspindi ilgumą. Skersinėje ir įstrižoje azimutinėse lygiatarpėse projekcijose paraleles išreiškia almukantaratai, o meridian kryptį – vertikalai, išsiskleidę visomis kryptimis nuo sąlyginio centro. Tarpai tarp vertikalų (meridianai) išreiškiami per azimutą *a*. Skersinės ir įstrižos lygiatarpių azimutinių projekcijų lygtys yra tokios:

$$x = R \times Z \times cosa; \qquad y = R \times Z \times sina$$

Remiantis šiais metodais buvo sukurta azimutinė triašio elipsoido projekcija Marso palydovui Fobosui. Kiekvienam Foboso elipsoido taškui, turinčiam φ ir λ koordinates, skaičiuojamas zenitinis nuotolis *Z* ir azimutas *a*. Statmenai besikertančiose tiesėse atidedama atkarpa *A*, kuri lygi ekvatoriaus ilgiui ilgumoje $\lambda = Z$ ir atkarpa B, kuri lygi vidurinio meridiano ilgiui platumoje $\varphi = Z$. Daroma prielaida, kad visi taškai, turintys zenitinį nuotolį *Z* patenka į elipsę, kurios pusašės yra *A* ir *B*. Elipsių centrai vidurinio meridian ir ekvatoriaus susikirtimo taške. Elipsių visuma sukuria almukantaratus, kurių zenitinis nuotolis lygus *Z*. Iš elipsių centro, azimutų *a* kryptimis vedamos tiesės, kurios tampa projekcijos vertikalais. Elipsoido paviršiuje esančio taško padėtį fiksuoja atitinkami susikertantys vertikalai ir almukantaratai. Vertikalo atkarpa nuo centro iki elipsės yra lygi elipsės spinduliui ρ. Taškų koordinatės nustatomos remiantis formulėmis:

$$x = \rho \times cosa; \qquad y = \rho \times sina$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\cos a}{B}\right)^2 + \left(\frac{\sin a}{A}\right)^2}}$$



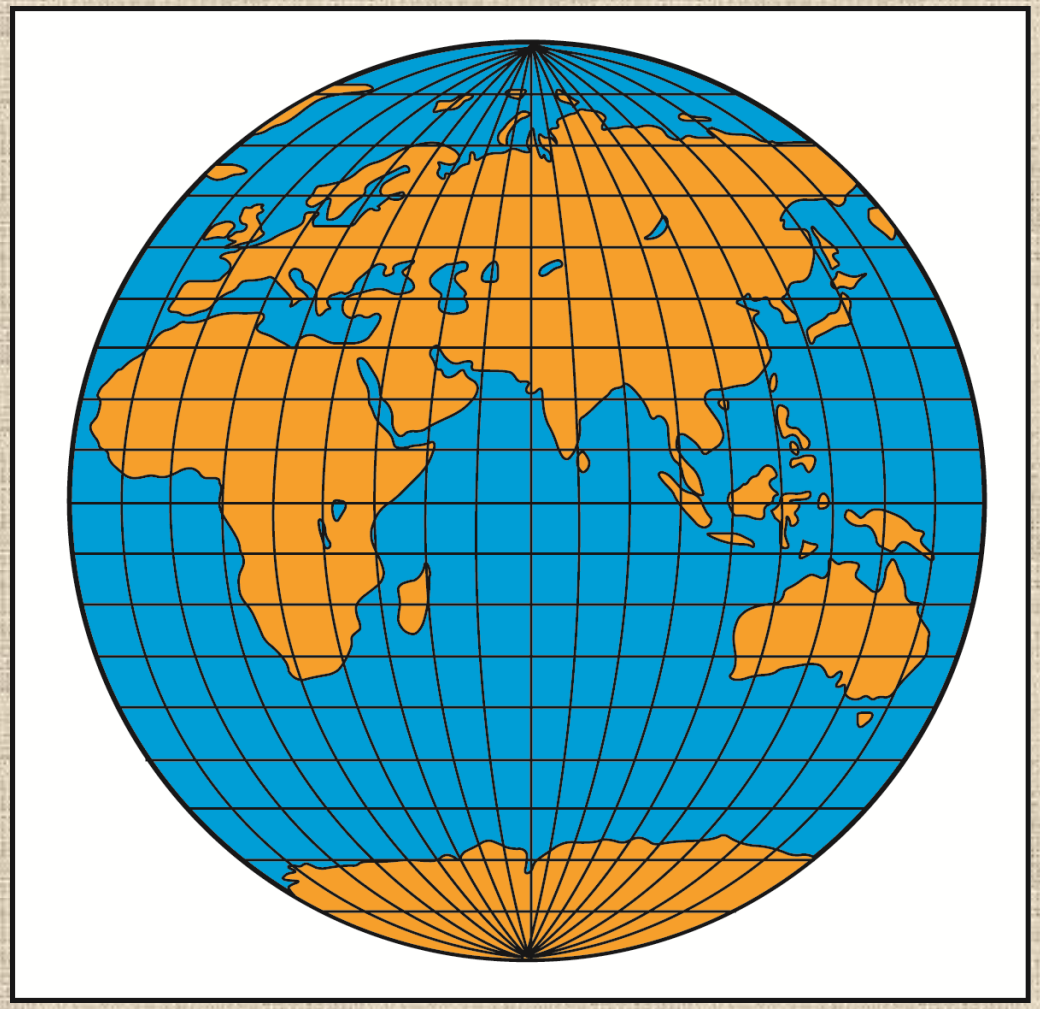
Marso palydovo Foboso vakarinio pusrutulio vaizdas, sudarytas poliazimutinėje triačio elipsoido projekcijoje.

Viduramžiais buvo sukurti globuliarinių kartografinių projekcijų principai, kurie buvo taikomi pusrutulių žemėlapiams sudaryti.

***Birunio globuliarinė projekcija*. Ją XI amžiuje pasiūlė arabų mokslininkas al – Birunis (973 – apie 1050). Apskritime, kurio spindulys R×π / 2 ir kuris atitinka žemėlapio mastelį, brėžiamos dvi statmenos skersmens linijos, kurios tapatinamos su ekvatoriumi ir viduriniu meridianu. Kraštiniais meridianais laikomas žemėlapio apskritimas. Skersmenis ir kiekvieną apskritimo ketvirtį dalija į lygias dalis. Per šiaurės ašigalį, pietų ašigalį ir ekvatoriaus padalos tašką brėžiamos kreivės, kurios ir tampa meridianais. XVIII amžiuje modernesnį tokį projekcijos sudarymo būdą pasiūlė italas Nikolozis (Nicolosi, 1610 – 1670). XVIII – XIX amžiuose tokia projekcija plačiai taikyta pusrutulių žemėlapiams sudaryti.**

***Globuliarinė Bekono projekcija*. XIII amžiuje šią projekciją pasiūlė Rodžeris Bekonas (Bacon, 1214 – 1292). Meridianai brėžiami taip pat, kaip ir Birunio projekcijos atveju. Kraštiniai meridianai dalijami į dalis. Paralelės yra tiesės, kurios brėžiamos per du išorinius meridianų taškus.**

***Globuliarinė Apiano projekcija*. Ją 1524 metais pasiūlė saksas Peteris Apianas (Peter Apian, 1495 – 1552). Vidurinis meridianas ir ekvatorius dalijami į lygias dalis. Per viduriniame meridiane esančius taškus brėžiamos lygiagrečios ekvatoriui tiesės – paralelės. Meriadianai kuriami lygiai taip pat, kaip ir Birunio projekcijoje – kreivės brėžiamos per polius ir ekvatoriaus padalos tašką. Apianas pasiūlė ir kitokią projekciją, kurioje naudojami ne apskritimo, o elipsės formos meridianai. Skiriasi jų kreivumas.**



Rytų pusrutulio vaizdas globuliarinėje Apiano projekcijoje.

Perspektyvinis rutulio paviršiaus projektavimas į plokštumą

Projektuojant perspektyviniu būdu rutulio paviršių į plokštumą sukuriama azimutinių projekcijų įvairovė. Iš projektavimo centro taško rutulio paviršius tiesiais spinduliais perkeliamas į plokštumą. Plokštumos paviršius gali liesti rutulį arba jį kirsti. Plokštumos paviršiuje taškų koordinatės apibrėžiamos azimutu *a* ir spinduliu *ρ*. Pastarasis priklauso nuo zenitinio nuotolio *Z*. (67 pav.). Šiame paveiksle, siekiant didesnio vaizdumo, projektavimo plokštuma kilstelėta virš rutulio paviršiaus.

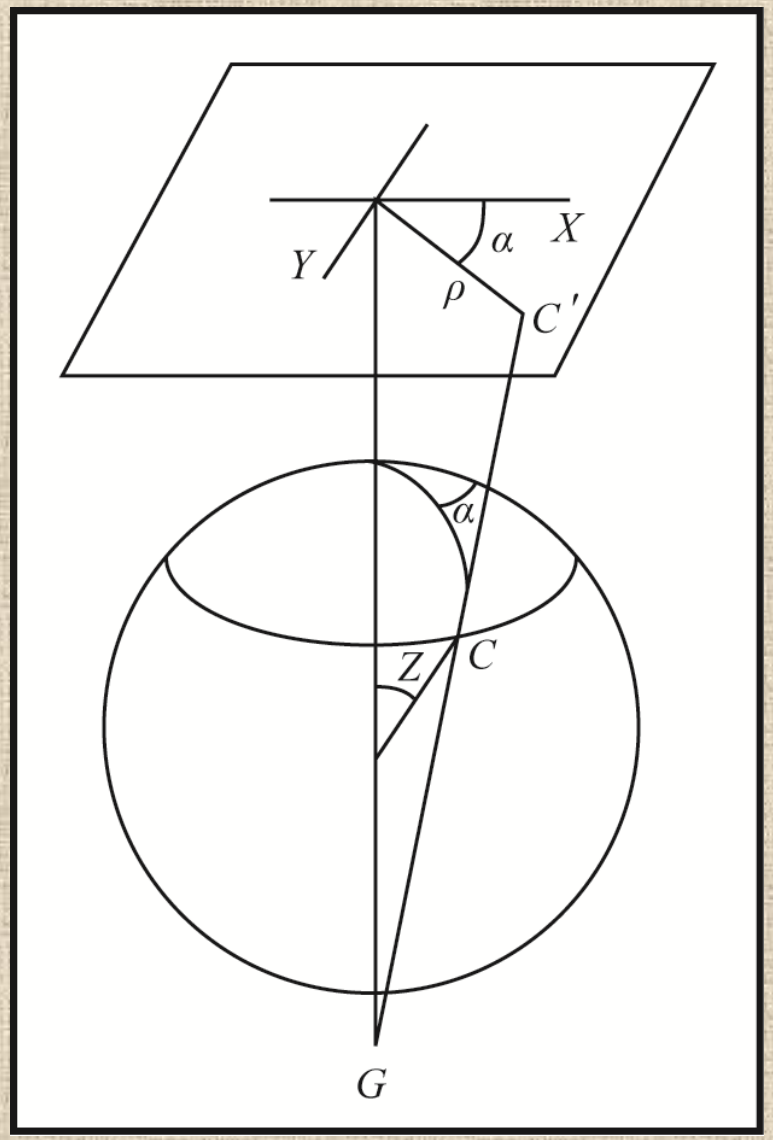
Plokštumoje taško koordinatės skaičiuojamos pagal formules:

$$x = \rho \times cosa; \quad y = \rho \times sina$$

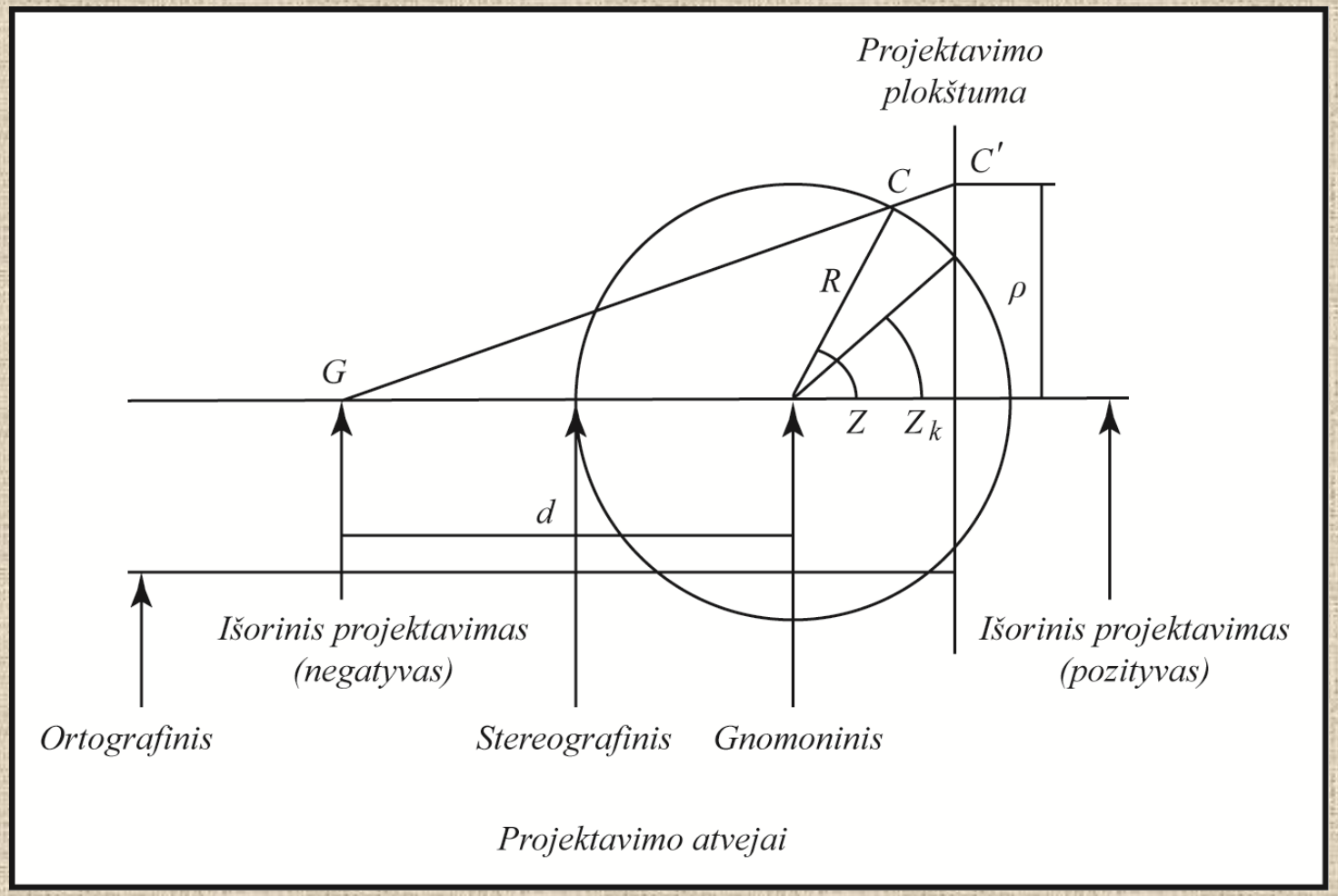
Projektavimo plokštumos padėtis apibrėžiama zenitiniu nuotoliu Z_k . Kai Z_k = 0 tai plokštuma liečia rutulį (gaublį). Visi rutulio paviršiaus taškai, kurie turi vienodą zenitinį nuotolį *Z* pateikiami viename apskritime (almukantarate). Almukantarato spindulys plokštumoje priklauso nuo nuotolio *d*, kuris išreiškia atstumą tarp projektavimo centro ir rutulio centro.

Atstumas *d* išreikštas per rutulio spindulį *R* gali svyruoti nuo 0 iki begalybės. Dydžių sąsajas (68 pav.) galima išreikšti formule:

$$\rho = \frac{d + cos\, Z_k}{d + coz\, Z} \times R\, sin\, Z$$



Azimutinis perspektyvinis rutilio paviršiaus projektavimas į plokštumą. Plokštumoje taško koordinatės aprašomos azimutu α ir spinduliu ρ, kuris priklauso nuo zenitinio nuotolio Z . Taškas G – projektavimo centras



Rutulio pavieršiaus, kurio spindulys R projektavimas į plokštumą. Brėžinyje pateikti dažniausiai pasitaikantys projektavimo centrų atvejai. d – atstumas tarp rutulio centro ir projektavimo centro.

68 paveiksle pateiktos pagrindinės projektavimo centrų padėtys, o 69 paveiksle – pagrindinės perspektyvinės azimutinės projekcijos. Panagrinėkime atvejus kai plokštuma liečia rutulio paviršių, tai yra $Z_k = 0$.

Jeigu projektavimo centras yra begalybėje, tai kuriama ortografinė perspektyvinė projekcija. Iš begalybės projektavimo spinduliai sklinda lygiagrečiu pluoštu. Šiuo atveju almukantarato spinduliui skaičiuoti taikoma formulė:

$$\rho = R \times sinZ$$ **(išorinei negatyvinio vaizdo projekcijai)**

Tokioje projekcijoje stebėtojas mato visus dangaus kūnus. Žemės rutulio ir kitų kosminių kūnų vaizdavimas ortografinėje projekcijoje turi erdvinį efektą.

Jeigu projektavimo centras yra fiksuotame nuotolyje nuo rutulio, tuomet kuriamos išorinės kartografinės projekcijos. Šios projekcijos gali būti dviejų tipų:

1. Kai projektavimo centras ir projektavimo plokštuma yra skirtingose nuo rutulio centro pusėse, tai projektuojamas vaizdas matomas “iš vidaus”. Tai išorinė negatyvinio vaizdo projekcija.

2. Kai projektavimo plokštuma yra tarp projektavimo centro ir rutulio centro tai vaizdas matomas “iš išorės”. Tai išorinė pozityvinio vaizdo projekcija. Taip Žemė atrodo iš kosmoso.

Visose kosminėse nuotraukose Žemės paviršius pateikiamas išorinėje pozityvinėje projekcijoje. Norint almukantarato spindulio skaičiavimo formulę taikyti išorinei pozityvinio vaizdo projekcijai dydį *d* (atstumą tarp projektavimo centro ir rutulio centro) paversti neigiamu dydžiu (– *d*).

Kai atstumas *d = 1*, tai yra projektavimo centras yra rutulio paviršiuje ir vykdomas negatyvinis projektavimas, tuomet kuriamos stereografinės projekcijos. Šių projekcijų almukantaratų spindulių skiačiavimui naudojama formulė:

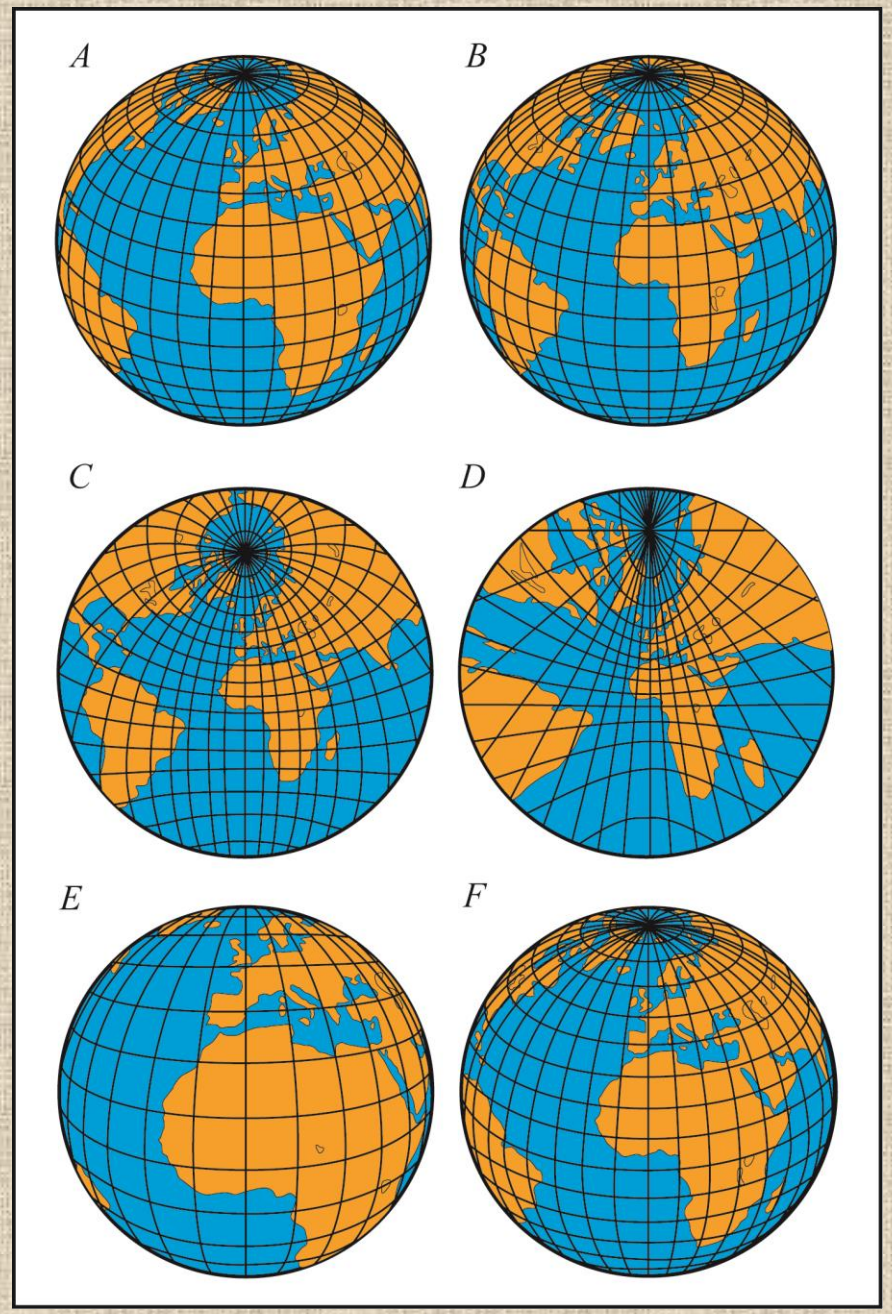
$$\rho = 2R \times tg\left(\frac{Z}{2}\right)$$

Ši formulė taikoma lygiakampėms projekcijoms. Bet koks apskritimas rutulio paviršiuje šioje projekcijoje taip pat virs apskritimu. Kadangi rutulio paviršiuje ortodroma, meridianai ir paralelės yra apskritimų lankai, tai lygiakampėje stereografinėje projekcijoje jie virsta apskritimais ir tik išimtinais atvejais – tiesėmis.

Kai *d = 0* ir projektavimas vykdomas iš rutulio centro, kuriamos gnomoninės projekcijos. Jų spindulys skaičiuojamas naudojant formulę:

$$\rho = R \times tgZ$$

Stebint projektuojamas linijas iš didelio spindulio apskritimo centro, jo lankų atkarpos, neviršijančio pusapskritimio ilgio atrodys kaip tiesės. Tai reiškia, kad gnomoninėse projekcijose visi didžiojo apskritimo lankai – ortodromos (trumpiausi atstumai tarp dviejų taškų rutulio paviršiuje) – visada bus tiesės.



Azimutinės perspektyvinės Žemės rutulio projekcijos: A – Ortografinė, B – išorinio vaizdo negatyvinė su projektavimo centru, nutolusiu per vieną Žemės spindulį, C – Stereografinė, D – gnomoninė, E – išorinio vaizdo pozityvin su projektavimo centru, nutolusiu per vieną Žemės spindulį, F – išorinio vaizdo pozityvinė su projektavimo centru, nutolusiu per 100 Žemės spindulių.

Gnomoninėse projekcijose, kai zenitinis nuotolis yra lygus $Z = \frac{\pi}{2}$. projektavimo spinduliai sklinda lygiagrečiai projektavimo plokštumai. Todėl almukantaratas, atitinkantis tokį zenitinį nuotolį (normalioje gnomoninėje projekcijoje jis sutampa su ekvatoriumi), nusitęsia į begalybę. Tai reiškia, kad žemėlapyje jo nebus. Visa tai reiškia, kad naudojant gnomonines projekcija galima kartografuoti plotą, mažesnį nei pusrutulis.

69 paveiksle pateiktas įstrižos projekcijos vaizdas, kurios sąlyginio ašigalio koordinatės yra lygios φ_o = 25° ir λ_o = 0° .Kartografinio tinklo vaizdas ir jo aprėptis skirtingoms projekcijoms yra nevienodas. Ortografinėje projekcijoje gali būti kartografuojamas pusrutulis $Z_{max} = \frac{\pi}{2}$.

Išorinėse perspektyvinėse projekcijose aprėpties dydis priklauso nuo nuotolio iki Žemės: esant mažam nuotoliui kartografuojami nedideli žemės paviršiaus plotai, esant dideliam atstumui gali būti kartografuotas visas pusrutulis. Stereografinėje projekcijoje galima kartografuoti visą Žemės rutulį, išskyrus tą tašką, kuris yra projektavimo centras. Be to, vaizdo periferinėse dalyse labai išauga vaizdo iškraipymo reikšmės. Gnomoninėse projekcijose kartografuojama erdvė yra mažesnė nei pusrutulis, o pusrutulio pakraščiuose vaizdo iškraipymas tampa ypatingai didelis. 69 paveiksle pateikta 3 / 4 pusrutulio.

Perspektyvinio projektavimo atveju Žemės rutulys preliminariai gali būti suprojektuotas į pagalbinį paviršių, pavyzdžiui į sferą, elipsoidą, hiperboloidą arba paraboloidą. Ir tik po to vaizdas nuo pagalbinio paviršiaus perkeliamas į plokštumą.

Rusų kartografas M.D.Solovjovas sukūrė daugkartinį vienos sferos projektavimo ant kitos metodą. Sfera, kurios spindulys yra lygus R, nuosekliai perkeliami į kelių pagalbinių sferų paviršius. Jų spinduliai gali būti *2R, 4R, 6R, 8R* ir taip toliau. Paskutinė pagalbinė sfera projektuojama į plokštumą. 70 paveiksle pateiktas tokio projektavimo pavyzdys. Čia pateiktas stereografinis projektavimo atvejis. Pirmoji sfera yra Žemės rutulys, kurio centras O_1, o spindulys *R*. Jos paviršiuje išskirtas taškas C_1, kurio zenitinis nuotolis lygus *Z*. Antroje sferoje, kurios spindulys *2R* , o centras O_2. Yra taškas C_2. Šio taško zenitinis nuotolis lygus $\frac{Z}{2}$.

Nuosekliai projektuojant gausime atvejį kai n – sferoje, kurios spindulys yra $2^{n-1} \times R$. Kartografuojamo taško zenitinis nuotolis bus lygus $\frac{Z}{2^{n-1}}$. Šio taško padėtis projektuojama į plokštumą.

Skaičiuojant almukantarato spindulio ilgį ρ plokštumoje, galima naudoti vienkartinio projektavimo formulę, pakeičiant joje atitinkamai zenitinio nuotolio ir sferų spindulių ilgio reikšmes. Pavyzdžiui, stereografinio tarpinio ir galutinio ortografinio projektavimo atvejais spindulio ilgį galima skaičiuoti naudojant formulę:

$$\rho = 2^{n-1} \times R\sin\left(\frac{Z}{2^{n-1}}\right)$$

Daugkartinis perspektyvinis projektavimas leidžia sukurti projekcija, kurių negalima suprojektuoti vienkartiniu rutulio projektavimu į plokštumą. Pavyzdžiui, jeigu *n* = *2*, bus gautas lygiatarpės azimutinmės projekcijos spindulys:

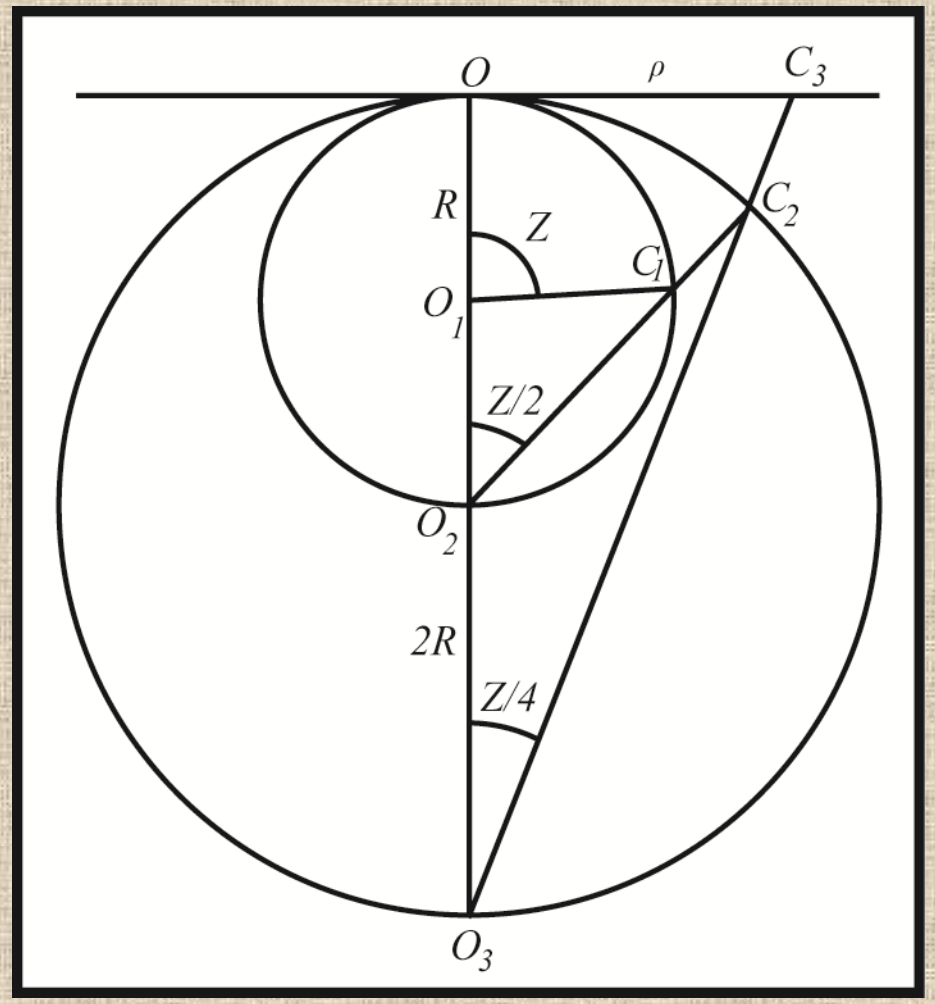
$$\rho = 2 \times R\sin\left(\frac{Z}{2}\right)$$

Toliau, jeigu *n* yra pakankamai didelis (*n* ≥ *8*), po mažos reikšmės kampų sinusų išskleidimo, gaunama lygiatarpę vertikalų kryptimi azimutinę projekciją:

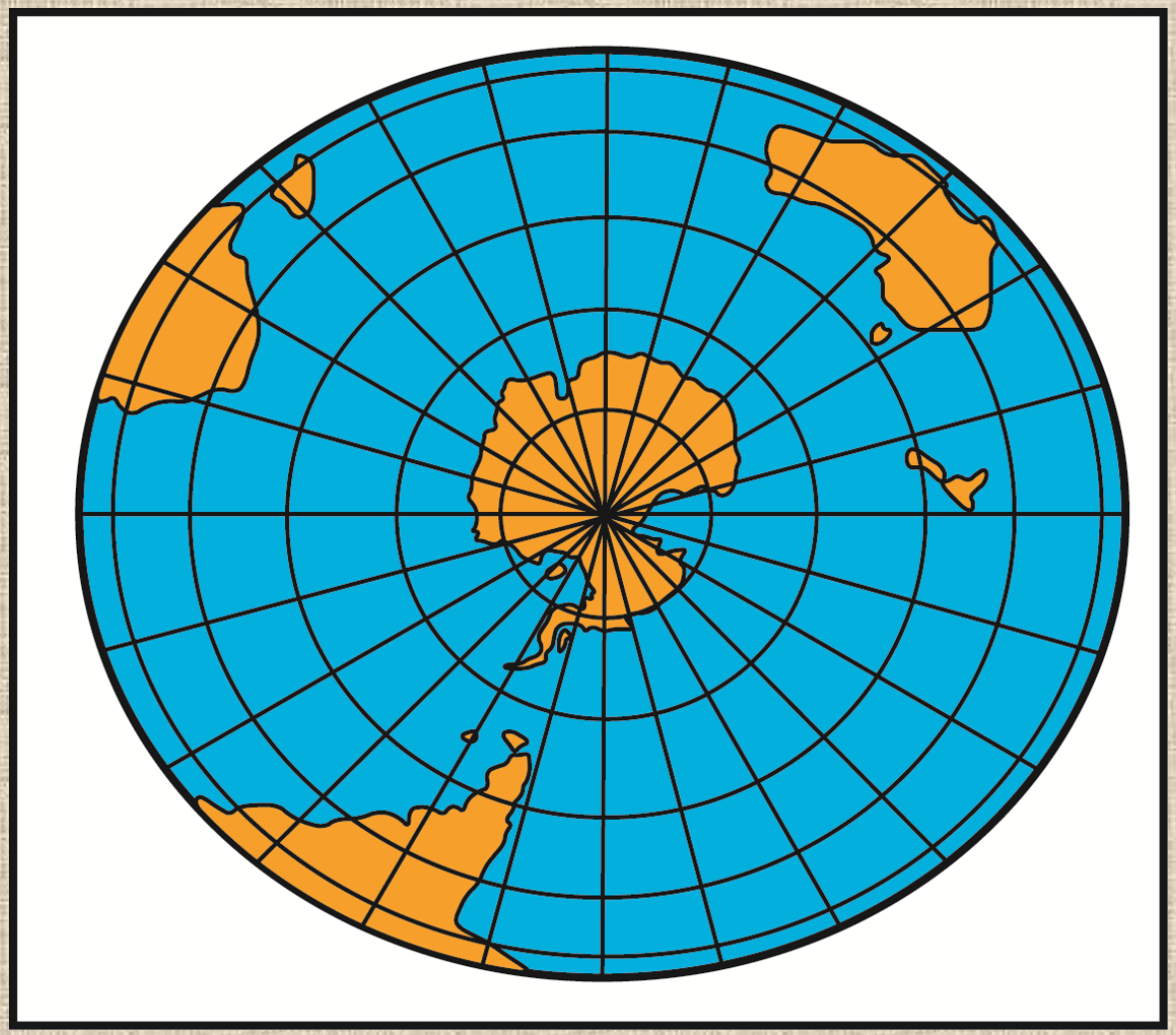
$$\rho = R \times Z$$

Tokios projekcijos, naudojant vienkartinį projektavimo būdą nebūtų galima sukurti.

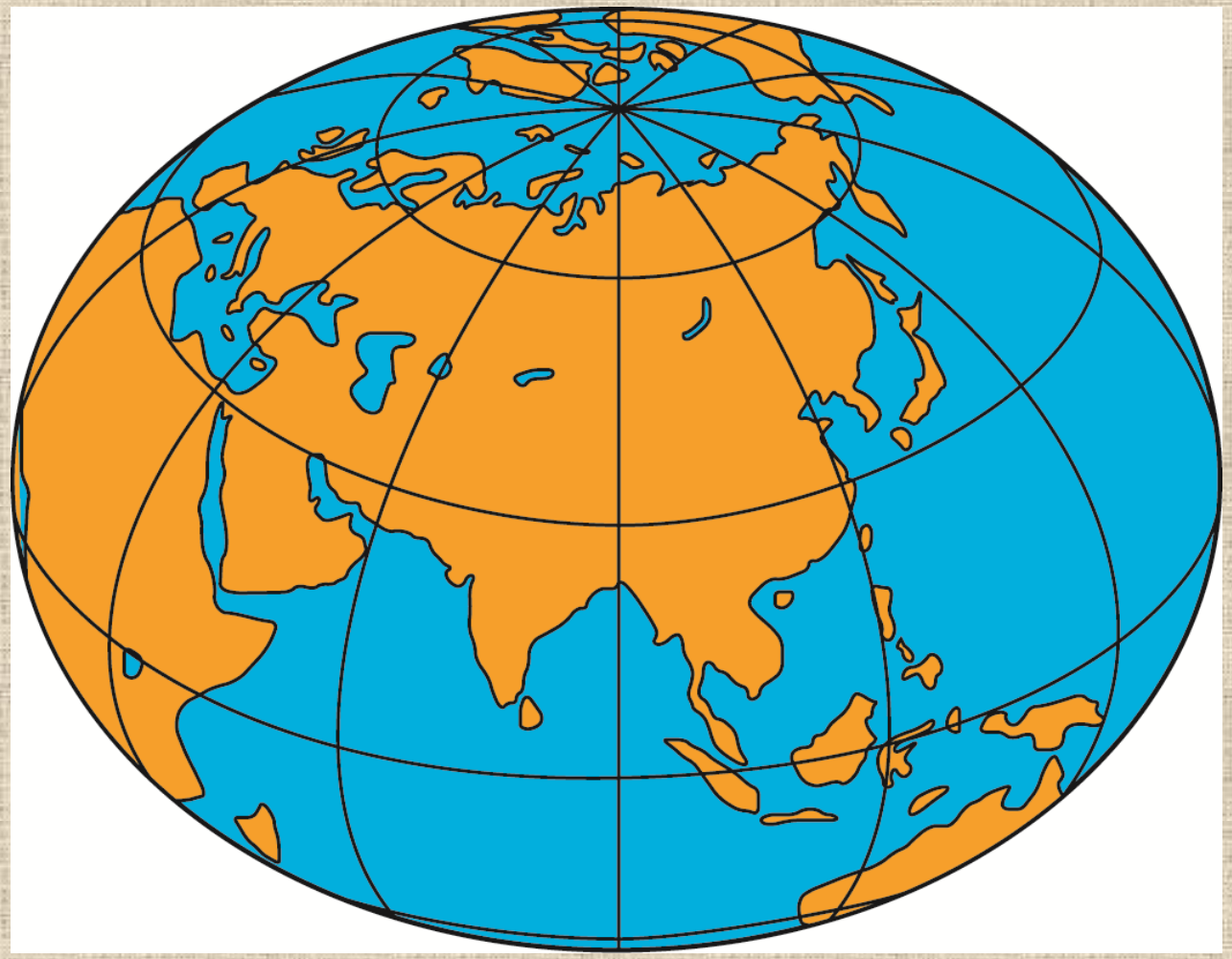
71 ir 72 paveiksluose pateikti pavyzdžiai perspektyvinių projekcijų, kurios sukurtos preliminariai Žemės rutulį (gaublį) projektuojant į triašį elipsoidą. Projektavimo metu sutapatinami gaublio ir triašio elipsoido centrai, polinės ašys, pradinio meridiano ir ekvatoriaus plokštumos. Rutulio spindulys yra lygus elipsoido polinei pusašei ir sudaro 0,75 ir 0,8 dalis nuo dviejų ekvatorinių pusašių. Maksimali elipsoido pusašė yra ekvatoriaus ir Grinvičo meridiano plokštumų susikirtime. Rutulys į elipsoido paviršių suprojektuotas taikant gnomoninį (iš centro), o elipsoidas į plokštumą – ortografinį (iš begalybės) projektavimo atvejus.



Perspektyvinių azimutinių projekcijų kūrimas, atliekant daugkartinį Žemės rutulio (gaublio) projektavimą į pagalbinių sferų paviršių.



Normali ortografinė triačio elipsoido projekcija, į kurios paviršių preliminariai gnomoniškai buvo suprojektuotas Žemės paviršius (gaublys).



Įstriža ortografinė triašio elipsoido projekcija, š kurios paviršių preliminariai gnomoniškai suprojektuotas Žemės paviršius (gaublys). Sąlyginio poliaus platuma 40°, ilguma - 90°.

Perspektyvinis rutulio projektavimas į cilindro paviršių

Perspektyvinės cilindrinės projekcijos kuriamos projektuojant rutulio paviršių į šonines cilindro sienas. Tokių projekcijų sudarymo metodika pristatyta 68 paveiksle. Skirtumas tik tas, kad vietoje plokštumos naudojama cilindro siena. Iš projektavimo centro meridiano vaizdas (normalaus projektavimo atveju) arba vertikalo vaizdas (skersinio ir įstrižo projektavimo atveju) perkeliamas į cilindro sienos paviršių. Laipsniškai perkeliant projektavimo centrą aplink cilindrą suprojektuojamas visas rutulio paviršius. Cilindras gali liestis su rutuliu ar jį kirsti. Dažniausiai cilindras su rutuliu liečiasi ekvatoriuje ar sąlyginiame ekvatoriuje (skersinės ir įstrižos projekcijos atveju). Todėl 68 paveiksle, taikant jį cilindrinėms projekcijoms, zenitinį nuotolį *Z* reikia pakeisti platuma *φ* arba sąlygine platuma *φ′*.

Formulėje pakeitus zenitinius nuotolius *Z* į sąlygines platumas *φ′* sukuriama perspektyvinių cilindrinių projekcijų abscisių formulė. Taškų ordinatės yra lygios cilindro pagrindo spindulio ilgumų išvestinėms *λ* arba sąlyginėms ilgumų išvestinėms *λ′*. Taškų padėtims skaičiuoti naudojamos formulės:

$$x = \frac{d+\cos\varphi'_k}{d+\cos\varphi'} R \sin\varphi'; \qquad y = R\,\lambda' \cos\varphi'_k$$

Platuma *φ′* lemia kertančio cilindro padėtį. Kai *φ′* = 0 cilindras liečiasi su tikruoju ar sąlyginiu ekvatoriumi.

Šio tipo projekcijos skiriasi tik abscisių reikšmėmis. Projekcijos vaizdas yra nulemtas atstumu *d* (nuotolis tarp projektavimo ir rutulio centrų). Perspektyvinės cilindrinės projekcijos būna negatyviosios (*d*) ir pozityviosios (- *d*).

Gnomoninė perspektyvinė cilindrinė projekcija. Ji kuriama projektuojant rutulio paviršių iš jo centro ant cilindro šoninės sienos (73 pav.). Taškų abscisių reikšmės liečiančio cilindro atveju skaičiuojamas naudojant formulę:

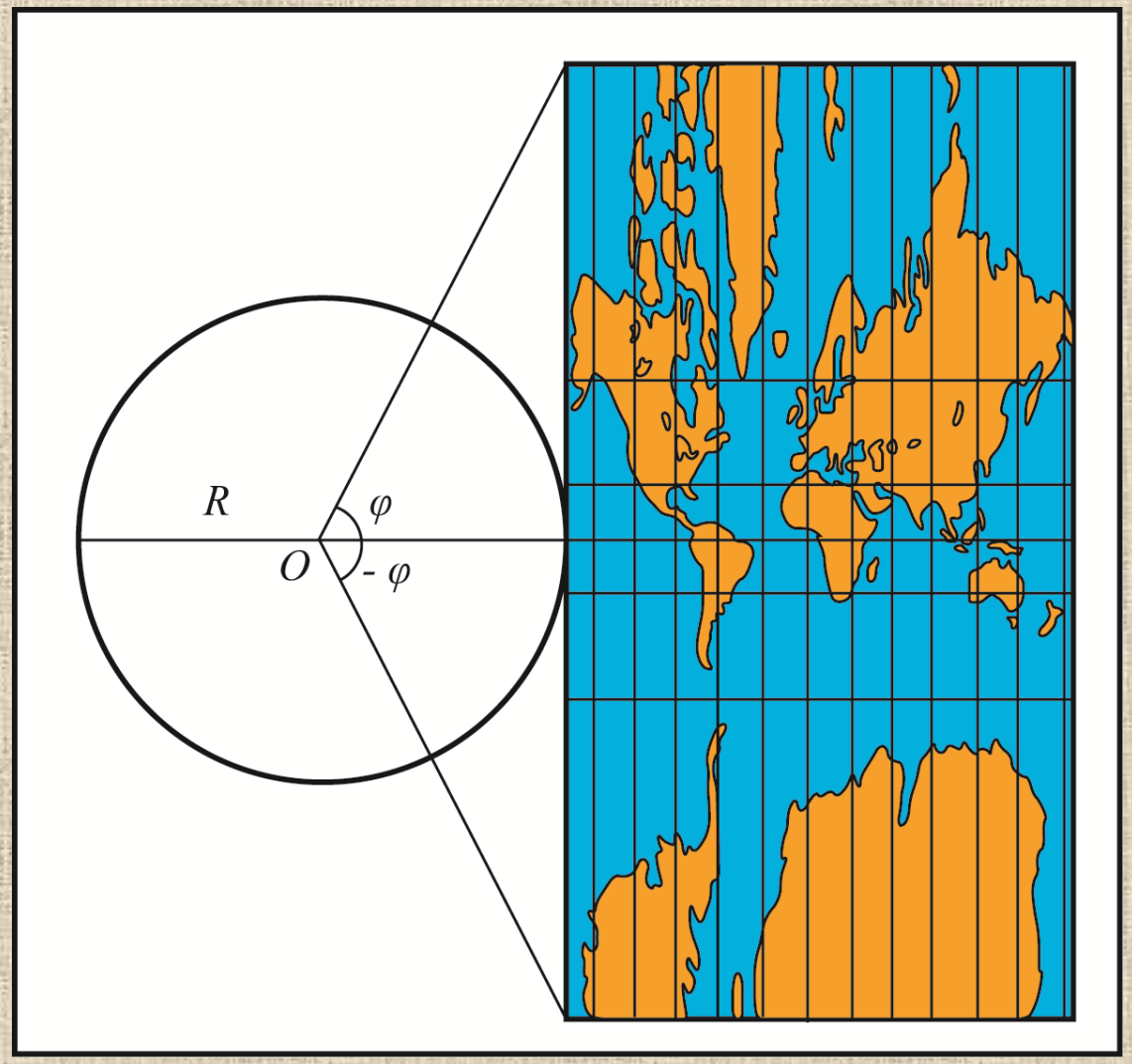
$$x = R \times tg\varphi$$

Kai platumų reikšmės yra $\pm\frac{\pi}{2}$ **projektavimo spinduliai iš rutulio centro sklinda lygiagrečiai cilindro sienelėms. Dėl šios priežasties normalaus cilindrinio projektavimo atveju poliai žemėlapiuose nerodomi. Skersinėse ir įstrižose cilindrinėse projekcijose taip pat nerodomi sąlyginiai poliai. Gnomonėje cilindrinėje projekcijoje labai dideli iškraipymai. Tokią projekciją XIX amžiaus pradžioje yra sukūręs Vetčas (J.Wetch).**

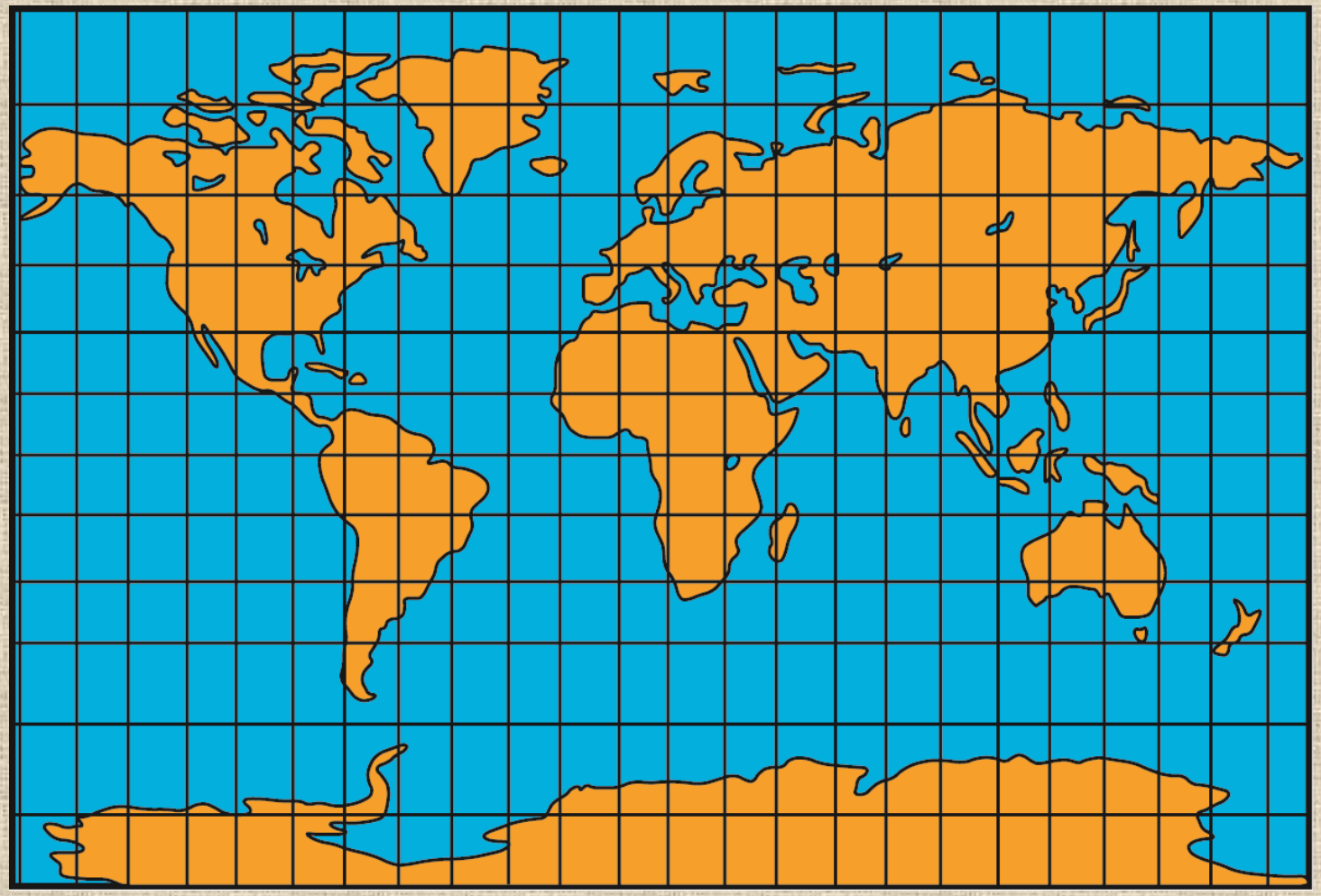
Stereografinė perspektyvinė cilindrinė projekcija. Ji kuriama projekcijos centrą parinkus priešingoje cilindro pusėje nei ta, į kurią projektuojama. Jeigu kuriama normali projekcija, tai cilindras su rutuliu liečiasi ekvatoriuje. Tokia yra Brauno projekcija (74 pav.). Šią projekciją 1868 metais sukūrė vokiečių fizikas K.Braunas. Pagal iškraipymų pobūdį ši projekcija priskiriama laisvųjų projekcijų grupei. Abscisių reikųmės skaičiuojamo naudojant formulę:

$$x = 2 \times Rtg\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Jeigu vietoje liečiančio naudojamas kertantis cilindras, tai iškraipymai šioje projekcijoje pasiskirstys tolygiau. Todėl be Brauno projekcijos naudojamos ir kitos panašios projekcijos: Galo (J.Gall, 1855), Didysis tarybinis pasaulio atlasas (1948). Galo projekcijoje cilindras kerta rutulį ties ± *45°* platuma, o Didžiojo tarybinio pasaulio atlaso – ties ± *30°* platuma.



Normalios gnomoninės perspektyvinės cilindrinės projekcijos sudarymas

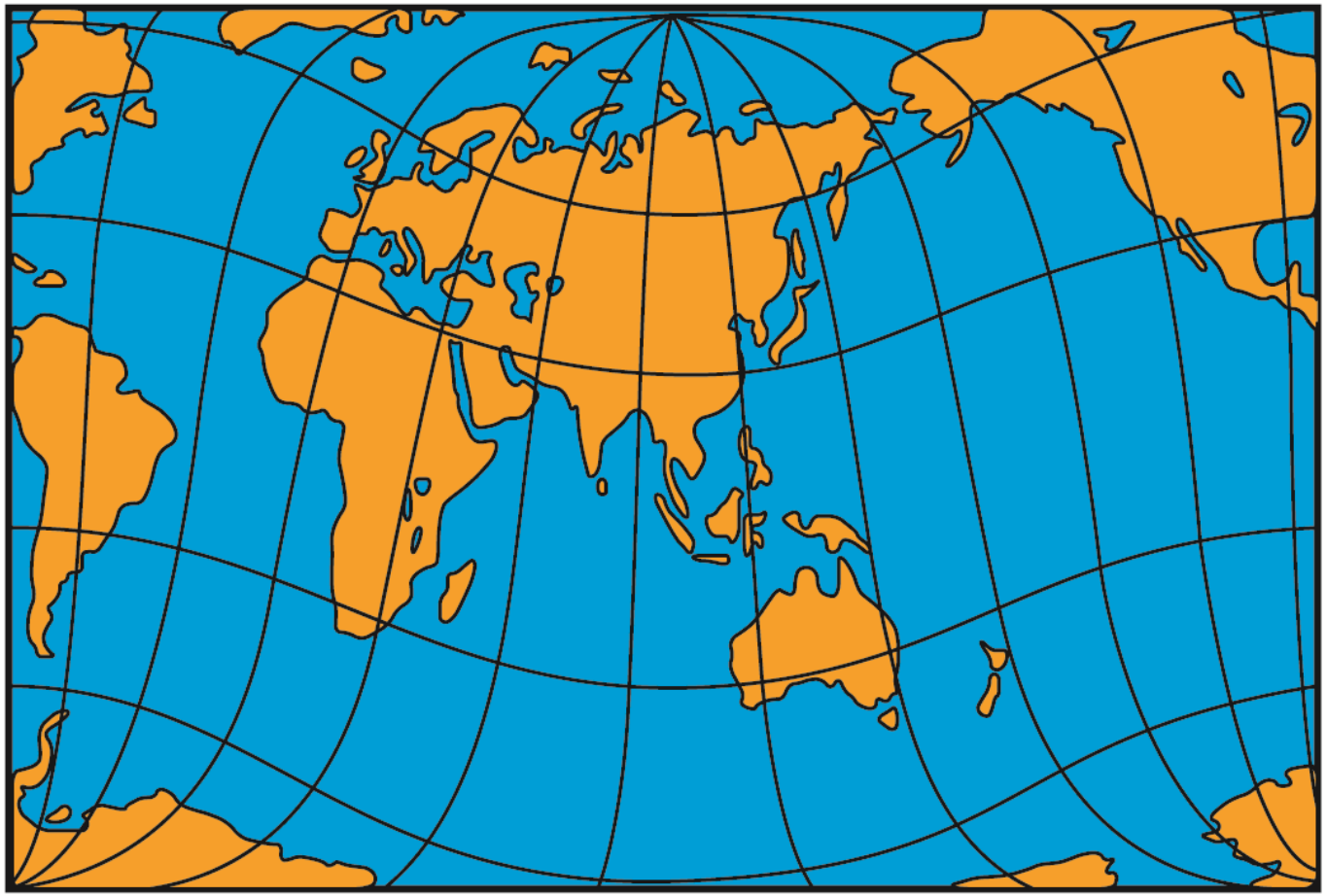


Normali perspektyvinė stereografinė cilindrinė Brauno projekcija

75 paveiksle parodyta įstriža perspektyvinė cilindrinė M.D.Solovjovo projekcija. Ji sukonstruota projektuojant Žemės rutulį į cilindro sienas, kuris kerta rutulį ties ± 45 ° sąlyginiu almukantaratu. Vidurinis meridianas yra ties 100° meridianu. Sąlyginio poliaus koordinatės yra φ_0 = 75º, λ_0 = - 80º. Sąlyginis polius yra ne ant vidurinio meridiano, o vidurinio meridiano pratęsime, jau už žemėlapio rėmelių. Dėl šio priežasties pietinis polius yra ne viename, o dviejuose taškuose. Solovjovo projekcijoje buvo sudaromi TSRS mokykliniai žemėlapiai, kurie naudoti buvusioje TSRS. Žemėlapiuose buvo pateikiama dalis šiaurės pusrutulio vaizdo. Jis buvo ribojamas 30 ° šiaurės platumo paralele bei 0° ir 160° vakarų ilgumos meridianais. Tokioje projekcijoje Arktis įgijo kupolo pavidalą, o šiaurės polius buvo to kupolo viršuje.

Orografinė cilindrinė projekcija. Ji kuriama nukeliant projektavimo centrą į begalybę. Projektavimas vyksta lygiagrečiais spinduliais. Liečiančio cilindro kartografinio tinklo abscisių reikšmėms nustatyti naudojama formulė:

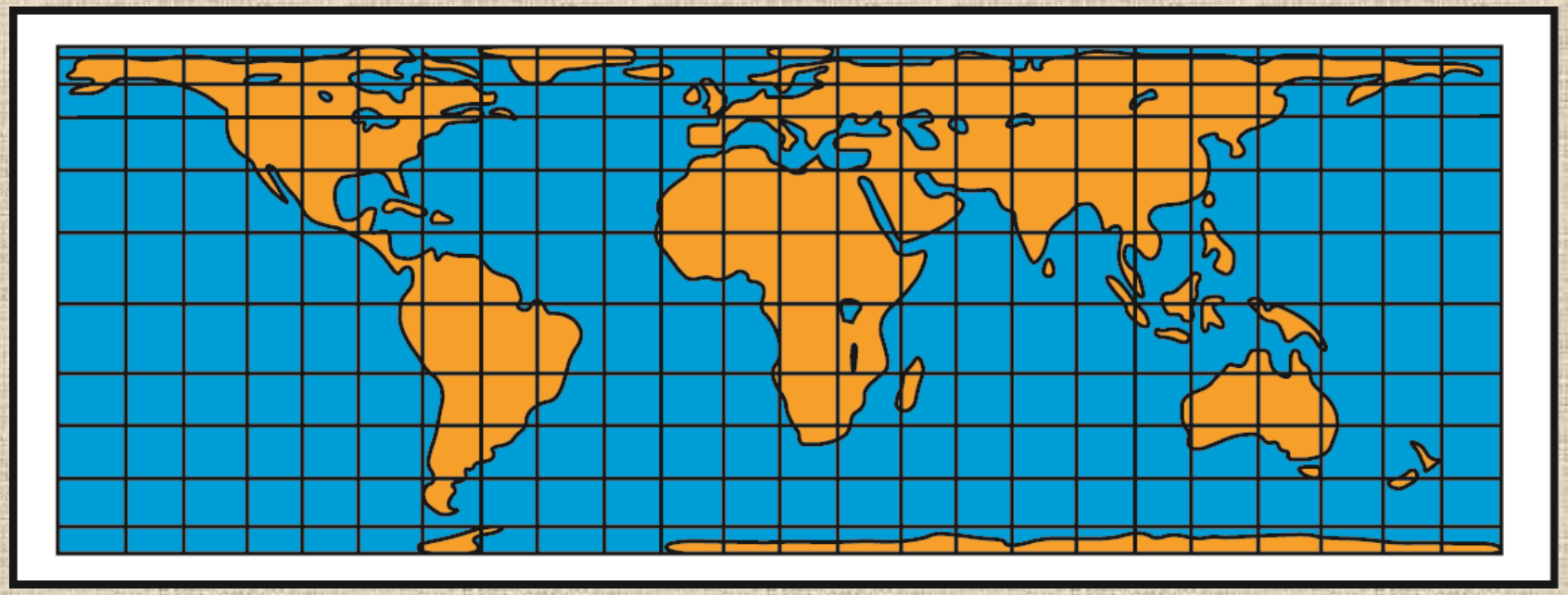
$$x = R \times sin\varphi$$



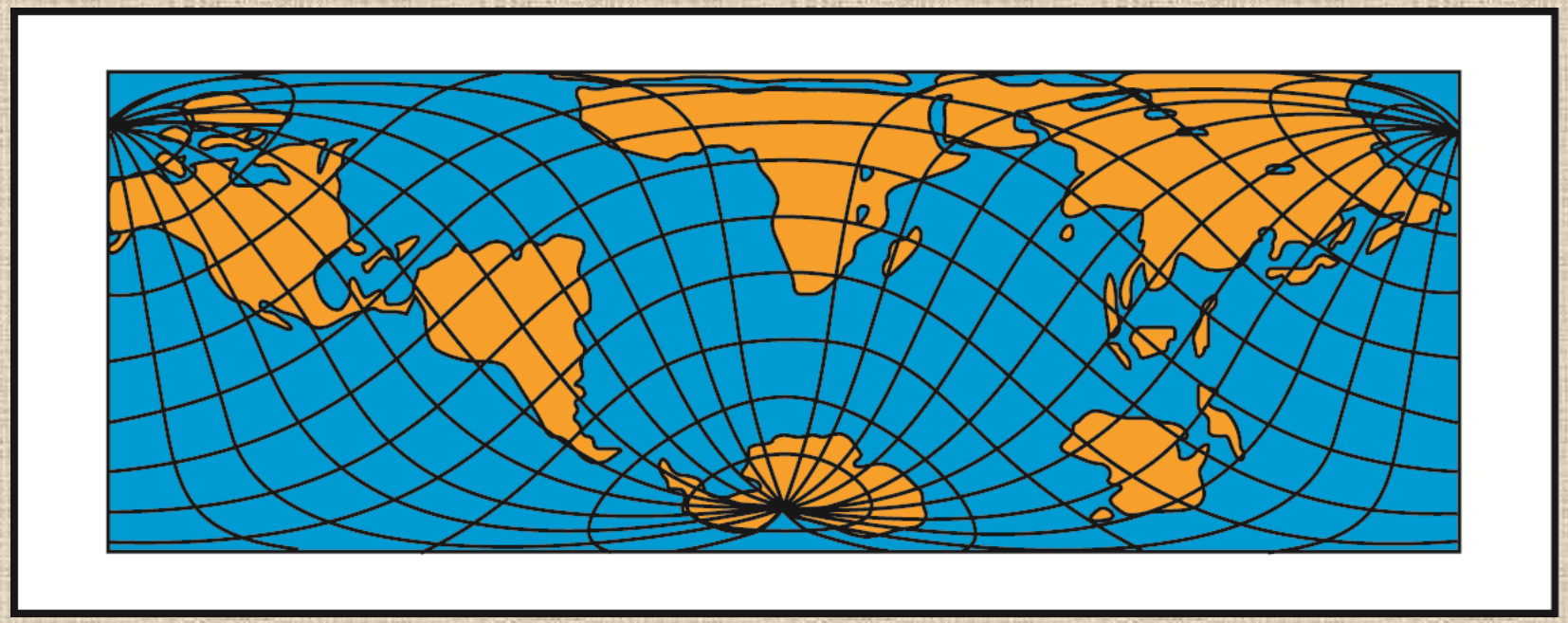
Įstriža stereografinė perspektyvinė cilindrinė M.D.Solovjovo projekcija

Rutulio paviršius žemėlapyje komponuojamas į stačiakampį, kurio aukštis lygus $2R$, o pagrindas - $2\pi R$. Stačiakampio plotas siekia $4\pi R^2$, tai yra jis atitinka kartografuojamos sferos plotui. Ortografinė cilindrinė projekcija yra lygiaplotė (izocilindrinė). Projekcijos lygiaplotiškumo savybė išplaukia iš Archimedo teoremos, kuri teigia, kad rutulio paviršiaus juostos plotas yra lygus cilindro juostos, turinčios tokį pat aukštį ir pagrindo ilgį, atitinkantį didįjį rutulio apskritimą (ekvatorių), plotui. Kuriant įstrižą ir skersines cilindrines projekcijas, jų sferinės koordinatės φ ir λ yra perskaičiuojamos į sąlyginę platumą ir ilgumą - φ' ir λ'. Tolimesnis projektavimas atliekamas kaip normalaus projektavimo atveju, išskyrus tik tai, kad vietoje sąlyginių paralelių ir meridianų braižomas geografinių paralelių ir meridianų tinklas (77 pav.).

Perspektyvinės cilindrinės ir azimutinės projekcijos, sukurtos naudojant vienodus projektavimo centrų ir rutulių centrų atstumus, skiriasi iškraipymų pobūdžiu. Pavyzdžiui, stereografinė azimutinė projekcija yra lygiakampė, tuo tarpu stereografinė cilindrinė projekcija – ne; ortografinė cilindrinė projekcija yra lygiaplotė, o ortografinė azimutinė projekcija – ne.



Normali perspektyvinė ortografinė lygiaplotė cilindrinė projekcija – izocilindrinė.

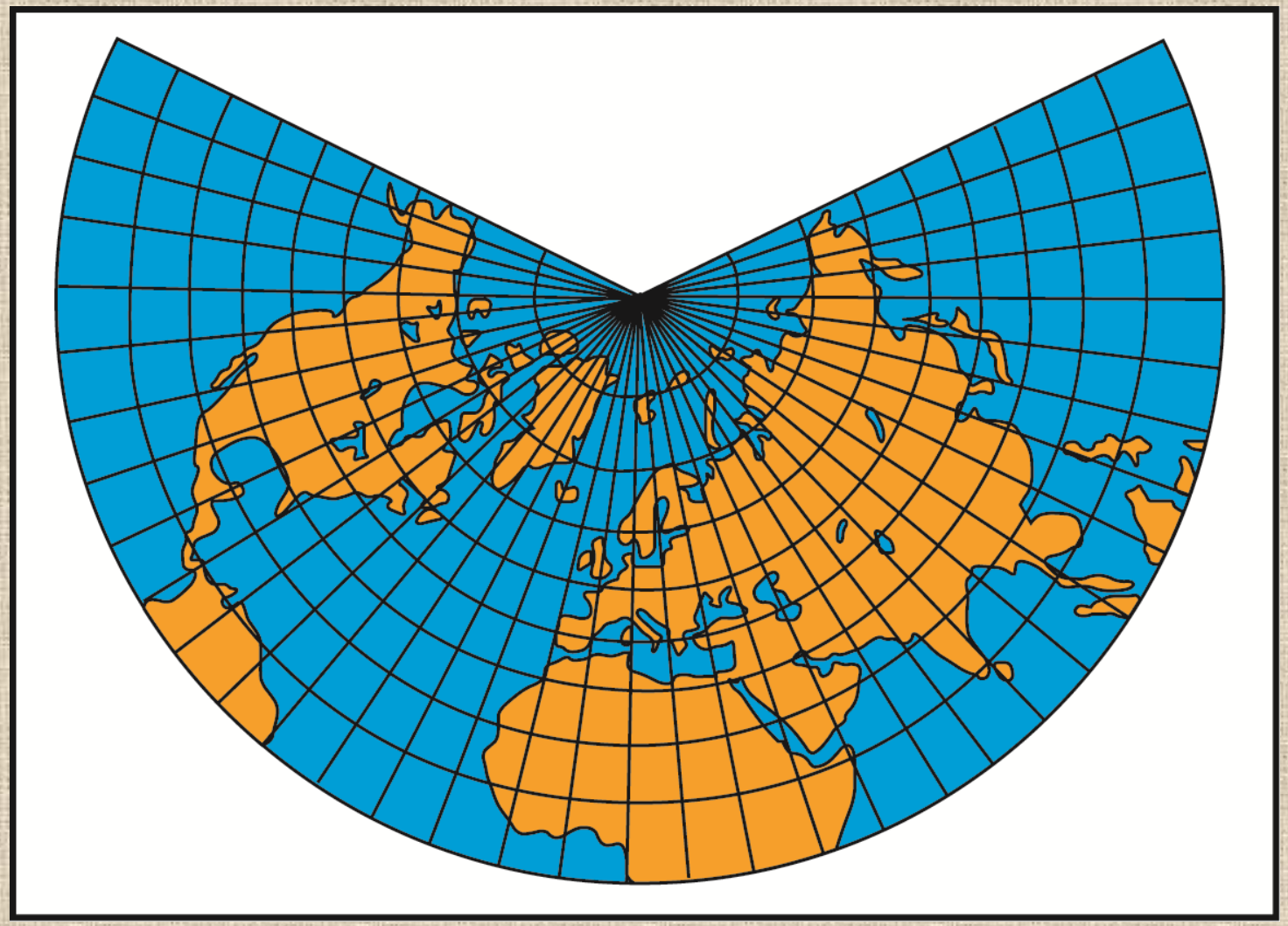


Įstriža (φ_0 = 50°) perspektyvinė ortografinė lygiaplotė cilindrinė projekcija.

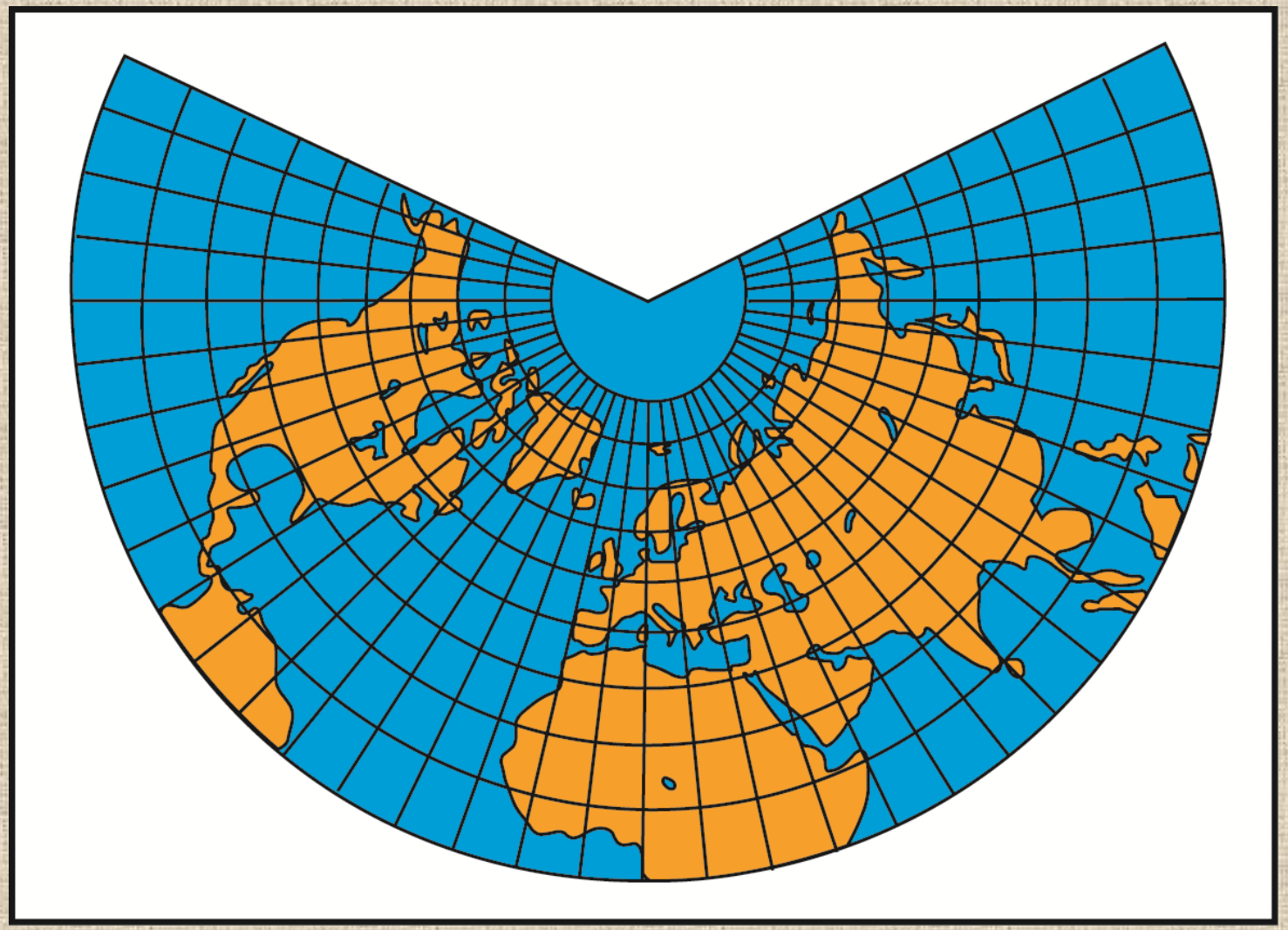
Perspektyvinis rutulio projektavimas į kūgio paviršių.

Perspektyvinės konusinės (kūginės) projekcijos kuriamos rutulio paviršių projektuojant į kūgio paviršių. Perspektyvinių kūginių projekcijų naudojimas yra labai ribotas, lyginant su perspektyvinėmis cilindrinėmis ir ypač perspektyvinėmis azimutinėmis projekcijomis. Be to ir kūginių perspektyvinių projekcijų savybės yra mažiau tyrinėtos nei kitų perspektyvinių projekcijų. Perspektyvinės kūginės projekcijos gali būti normalios, skersinės ir įstrižo. Kuriant perspektyvines kūgines projekcijas jų centrai gali sutapti su rutulio centru arba būti nutolinti įvairiu atstumu nuo jo. Kūgis gali liesti rutulį arba kirsti jį ties dviem pagrindinėmis paralelėmis (normalus projektavimo atvejis) ar ties dviem sąlyginėmis paralelėmis (skersinis ir įstrižas projektavom atvejis). Projektavimo metu gali būti kuriamas pozityvinis arba negatyvinis vaizdas. Projekcijos savybes didele dalimi lemia projekcijos centro padėtis, sąlyginio poliaus padėtis, ties kuria paralele kūgis liečia rutulį (pagrindinė paralelė lietimosi atveju) ir kurias paraleles kūgis kerta (pagrindinės paralelės kirtimo atveju).

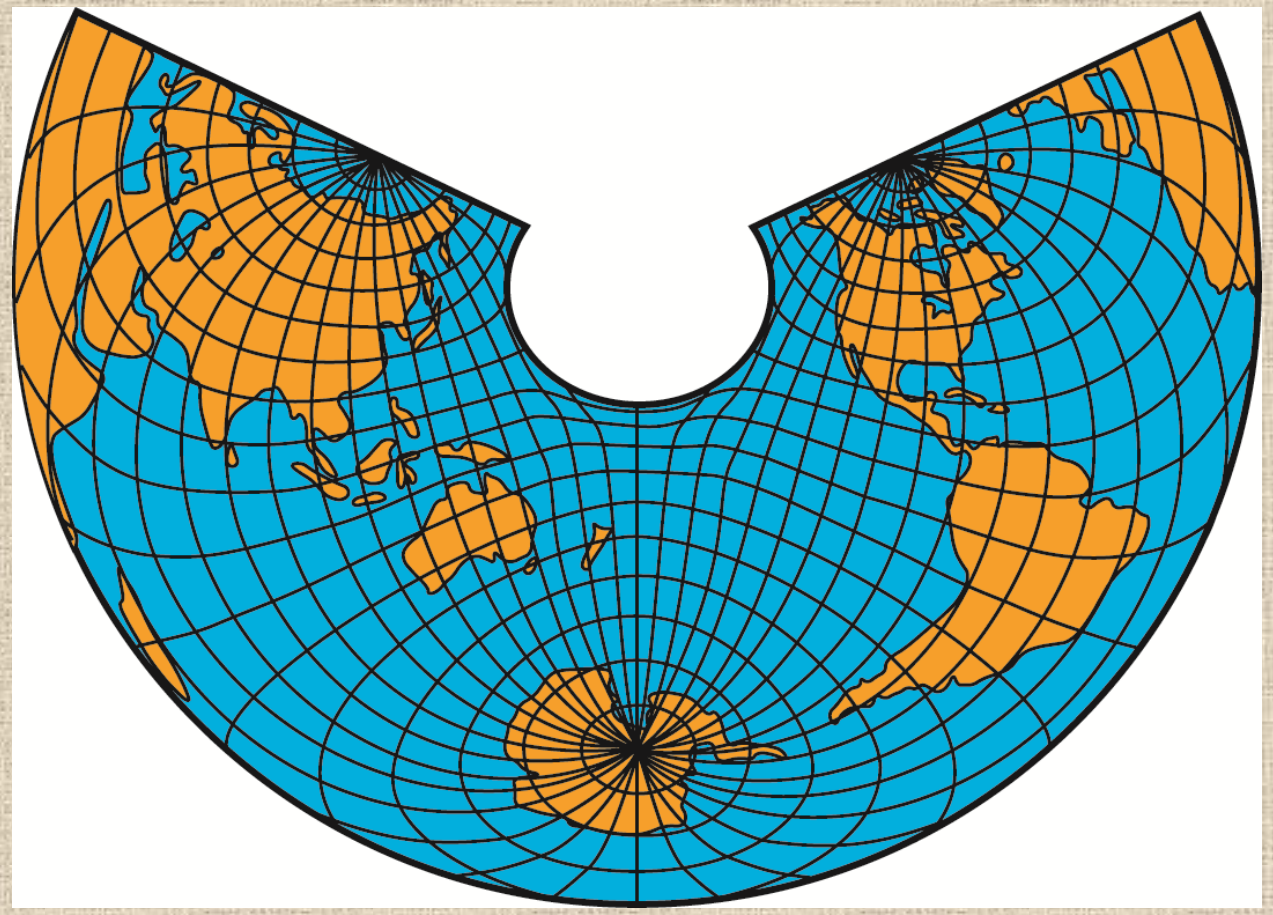
78 ir 79 paveiksluose pateikti normalaus projektavimo atvejo perspektyvinių kūginių projekcijų pavyzdžiai. Vienu atveju rutulio paviršius į kūgio paviršių projektuotas iš jo centro, kitu – nuo rutulio paviršiaus. Šiuos atvejus galima prilyginti gnomoniniam ir stereografiniam azimutinių ir cilindrinių perspektyvinių projekcijų kūrimo atvejams. 80 paveiksle pateiktas įstrižos perspektyvinės kūginės projekcijos pavyzdys, kur projektavimo centras nutolintas nuo rutulio centro per 10 rutulio spindulio atstumų. Visos perspektyvinės kūginės projekcijos pagal iškraipymų pobūdį priskiriamos laisvųjų projekcijų grupei.



Normali gnomoninė prerspektyvinė kertanti kūginė projekcija.Pagrindinės 20° ir 60° paralelės. Vidurinis meridianas - 11°.



Normali stereografinė perspektyvinė kertančioji kūginė projekcija. Pagrindinės 20° ir 60° šiaurės platumos paralelės. Vidurinio meridiano ilguma 11°.



Įstriža negatyvinio vaizdo perspektyvinė kertančioji kūginė projekcija. . Pagrindinės 30° ir 50° šiaurės platumos paralelės. Vidurinio meridiano ilguma 150°. Sąlyginio poliaus platuma 20°. Projektavimo centras nuo rutulio centro nutolęs per 10 Žemės rutulio spindulių.

Projekcijų kūrimas remiantis kartografinio tinklo vaizdo eskizais

Pirmasis projekcijų kūrimą remiantis kartografinio tinklo eskizais pasiūlė rusų kartografas N.A. Umarovas. Jis sukūrė šio metodo skaitmeninės analizės pagrindus. Vėliau tokį kartografinių projekcijų kūrimo būdą tobulino G.A. Ginzburgas, V.M. Boginskis, K.L.Ledovskaja, T.D. Salmanova ir kiti. Šis metodas – tai rusų kartografijos mokyklos vienas skiriamųjų bruožų. Buvusios TSRS Centriniame geodezijos, aeronuotraukos ir kartografijos mokslo tyrimo institute (CGAKMTI) XX amžiaus ketvirtame – aštuntame dešimtmečiuose buvo sukurta daug kartografinių projekcijų, taikant kartografinio tinklo eskizus. Gana plačiai naudotos polikonusinės CGAKMTI sukurtos projekcijos pasaulio žemėlapiams sudaryti.

Projekcijų kūrimas remiantis kartografinio tinklo vaizdo eskizais susideda iš kelių etapų:

1. Kartografinio tinklo eskizo sudarymas.

2. Matematinis eskizo apdorojimas.

***Kartografinio tinklo eskizo sudarymas*. Tai pagrindinis kūrybinis etapas. Pradžioje nustatoma būsimos projekcijos paskirtis ir reikalavimai projekcijai. Eskizo kūrimas pradedamas jau sukurtų kartografinių projekcijų, savo vaizdu ir savybėmis artimų būsimai projekcijai, išsamia analize. Svarbūs aspektai – tai vidurinio meridiano parinkimas, kartografinio tinklo simetriškumas ar asimetriškumas vidurinio meridiano ir ekvatoriaus atžvilgiu, vidurinio meridiano ir paralelių suskaidymas atkarpomis (paralelių žingsnio tolygumas ar netolygumas), poliaus vaizdas (taškas, lankas ar tiesi atkarpa), poliaus linijos ilgio (jeigu jis pateikiamas atkarpa) vidurinio meridiano ir ekvatoriaus ilgių santykis.**

Parinkus tinkamiausią jau sukurtą kartografinę projekciją, toliau joje keičiami atitinkami parametrai ir kuriamas projekcijos vaizdo eskizas. Sudarant pasaulio žemėlapių projekcijų eskizus, pradžioje brėžiamas vidurinis ir kraštiniai šoniniai meridianai. Vidurinis meridianas visada būna tiesė, o kraštiniai šoniniai meridianai – kreivės. Po to meridianai dalijami į atkarpas, kuriomis bus brėžiamos paralelės (paralelių žingsnio nustatymas). Nubrėžus paraleles, jose fiksuojami mazginiai taškai, per kuriuos bus brėžiami likę meridianai.

Brėžiant paraleles atsižvelgiama į jų formos visumą. Paralelė visame savo ilgyje gali turėti pastovų arba kintamą kreivumą. Taip pat visos projekcijos paralelės gali turėti vienodą ar kintamą kreivumą. Kaip paralelės turi pastovų kreivumą, jų forma dažniausiai artima apskritimo lankui. Kintamo kreivumo paralelių forma dažniausiai artima elipsei. Tačiau jeigu paralelės kreivumas atskirose jos atkarpose kinta, siekiama, kad visas jos vaizdas būtų artimas tolygiai elipsei.

Svarbus aspektas – iškraipymų dydžiai. Jeigu paralelės forma artima apskritimo lankui, tai tuo atveju mažai iškraipomi kampai, tačiau stipriai iškraipomi plotai. Kitas svarbus reikalavimas kuriant ortogonalines projekcijas – kampai tarp paralelių ir meridianų turi būti statūs. Taip išvengiama kampų iškraipymo.

Matematinis eskizo apdorojimas. **Ši procedūra atliekama įvairiais būdais. Jeigu sudaroma projekcija bus simetriška vidurinio meridiano atžvilgiu, o jos paralelės pastovaus kreivumo apskritimų lankai, tai pakanka nubrėžti vidurinį ir kraštinį šoninį meridianus bei nustatyti mazginių taškų ortogonalines ir geografines koordinates. Mazginių taškų koordinatės nustato grafiškai, interpoliuojant ar sprendžiant polinomines lygtis. Pasirenkant polinomus būtina atsižvelgti į kartografinio tinklo savybes. Jeigu kartografinis tinklas bus simetriškas ekvatoriaus atžvilgiu, tai polinome x reikšmės skaičiuojamos per neporines laipsnines funkcijas. Jeigu kartografinis tinklas bus simetriška vidurinio meridiano atžvilgiu tai polinome y reikšmės skaičiuojamos per neporines laipsnines funkcijas. Laikomasi nuostatos, kad X ašis nukreipta į šiaurę ir sutapatinama su viduriniu meridianu, o Y ašis nukreipta į rytus ir sutapatinama su ekvatoriumi:**

$$x = a_1\varphi + a_3\varphi^3 + a_5\varphi^5 + a_7\varphi^7$$

$$y = b_0 + b_2\varphi^2 + b_4\varphi^4 + b_6\varphi^6 + b_8\varphi^8$$

Vidurinio meridiano polinomas paprastai turi žemą laipsninę funkciją. Šoninio kraštinio meridiano polinomo laipsnį nustato prisilaikant tokios taisyklės: esant n mazgų skaičiui, didžiausias vidurinio meridiano laipsnis lygus n – 1 arba n – 2. Polinomų koeficientai skaičiuojami taikant mažiausių kvadratų metodą. Taip minimalizuojamos skaičiavimų kvadratinio nuokrypio sumos ir kartografinio tinklo eskize fiksuotų mazginių taškų dydžiai.

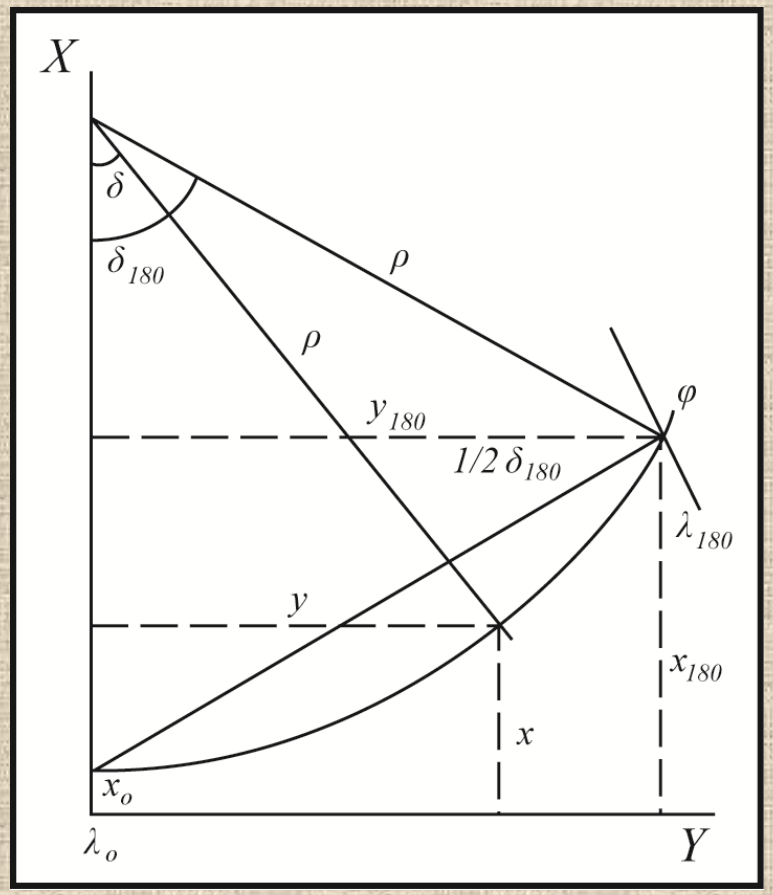
Jeigu paralelės yra apskritimų lankai, tai likusių projekcijos mazginių taškų koordinačių skaičiavimas atliekamas naudojant šias formules (81 pav.).

$$\rho = \frac{y_{180}}{sin\delta_{180}}; \qquad tg\left(\frac{\delta_{180}}{2}\right) = \frac{x_{180} - x_0}{y_{180}}; \qquad \delta = \frac{\delta_{180}}{\pi}\lambda; \qquad x = x_0 + \rho(1 - cos\delta); \qquad y = \rho \times sin\delta$$

Taip galimi ir kitokie kūrimo variantai. L.K.Zatonskis XX amžiaus penktame – šeštame dešimtmečiuose sukūrė Pasaulinio vandenyno žemėlapį taikydamas kartografinės projekcijos eskizo metodą. Šiame eskize paralelės yra elipsių lankai. Meridianai didžiojoje žemėlapio dalyje yra elipsių lankai, o polių srityse – tiesės. Tarp meridianų lankų ir tiesių įterpti apskritimų lankai.

Matematinės eskizo analizės tikslas – nustatyti skaitmeninius elipsių, apskritimų ir tiesių parametrus. Taškų koordinatės nustatomos sprendžiant atitinkamo žemėlapio plotos paralelių ir meridianų lygtis.

Kai eskizas sudaromas visam žemėlapio kartografiniam tinklui, būtina, kad visiems mazginiams taškams būtų nustatytos ortogonalinės ir geografinės koordinatės. Vėliau šios analizuojami ir vertinami šie duomenys. Tam dažniausiai naudojamas polinomas, turintis du argumentus – platumos ir ilgumos. Daugianarių laipsnis nustatomas atliekant papildomą analizę. Kuo laipsnis aukštesnis, tuo tiksliau lygtys apibrėžia kartografinio tinklo vietą eskize. Kita vertus, labai aukšti daugianarių laipsniai komplikuoja skaičiavimus. Be to, lygtys atspindės ne tik kartografinės projekcijos savybes, bet ir grafinius projekcijos eskizo sudarymo netikslumus. Tai du, vienas su kitu tiesiogiai nesisiejantys dalykai.



Projekcijos kūrimas remiantis kartografinio tinklo eskizu.. Brėžinyje pateikta taško koordinačių x ir y sąsajos su taškų, esančių viduriniame meridiane ir šoniniuose kraštiniuose meridianuose (x_{180} ir y_{180}). Vis taškai yra vienoje paralelėje *φ*, kuri yra apskritimo lankas.

Sudarant lygtis, daugianariams keliamos sąlygos, kurios yra nulemtos kartografinio tinklo ypatybėmis. Svarbūs šie dalykai:

1. Kartografinio tinklo simetriškumas vidurinio meridiano atžvilgiu. Ilgumą apibrėžiančiose lygtyse *x* daugianariai privalo turėti porinius laipsnius, o *y* – neporinius.

2. Kartografinio tinkle simetriškumas ekvatoriaus atžvilgiu. Platumą apibrėžiančiose lygtyse *x* daugianariai privalo turėti neporinius laipsnius, o *y* – porinius.

3. Kartografinio tinklo simetriškumas vidurinio meridiano ir ekvatoriaus atžvilgiu. Platumą apibrėžiančiose lygtyse *x* daugianariai privalo turėti neporinius laipsnius, *y* – porinius laipsnius, ilgumą apibūdinančiose lygtyse *x* daugianariai privalo turėti porinius laipsnius, o *y* – neporinius. Jie aprašomi tokiomis formulėmis:

$$x = a_1\varphi + a_2\varphi^3 + a_2\varphi\lambda^2 \ldots\ldots\ldots; \qquad y = b_1\lambda + b_2\lambda^3 + b_3\varphi^2\lambda \ldots\ldots\ldots;$$

4. Poliaus taško sąlyginės kordinatės yra:

$$x_\rho = const.; \quad y_\rho = const.$$

Polinomų koeficientai nustatomi minimalizuojant nuokrypių mažiausių kvadratų sumas. Nuokrypių reikšmės nustatomos atliekant matavimus kartografinės projekcijos eskize ir skaičiuojamos remiantis matuojamų taškų skaičiavimo formulėmis. Tam naudojamos standartinės minimalizavimo programos. Šiuo metu atitinkamų išvestinių parametrų skaičiavimai nevykdomi.

Galimi ir kiti variantai, atliekant matematinę eskizo analizę. Tam gali būti taikomos interpoliacinės formulės. Jų taikymui būtina sukurti mazginių taškų ortogonalinių ir geografinių koordinačių lenteles. Vėliau lentelių duomenys analizuojami taikant standartinius interpretacinius programinius paketus.

82 paveiksle pateiktas žemėlapis, kurio kartografinio tinklelio platumos ir ilgumos žingsnis lygus 10°. Maketas sukurtas taikant tokį metodą: pirminis žemėlapis, sudarytas L.K.Zatonskio projekcijoje A4 lapo formate. Žemėlapis skenuotas, o monitoriaus ekrane, taikant atitinkamą programinę įrangą, nustatytos mazginių taškų koordinatės. Kadangi žemėlapio kartografinis tinklas yra simetriškas vidurinio meridiano ir ekvatoriaus atžvilgiu, įskaitmeninti pakanka tik vieną žemėlapio ketvirtį.

Sukurta ortogonalinių ir geografinių koordinačių lentelė naudojama žemėlapio maketui sukurti. Makete svarbų vaidmenį atlieka žemynų kranto linija. Jos vaizdas kuriamas naudojant kvadratinę dviejų kintamųjų interpoliaciją.

Zatonskio kartografinės projekcijos žemėlapio maketas. Kartografinis tinklas sudarytas remiantis mazginių taškų kvadratine interpoliacija.

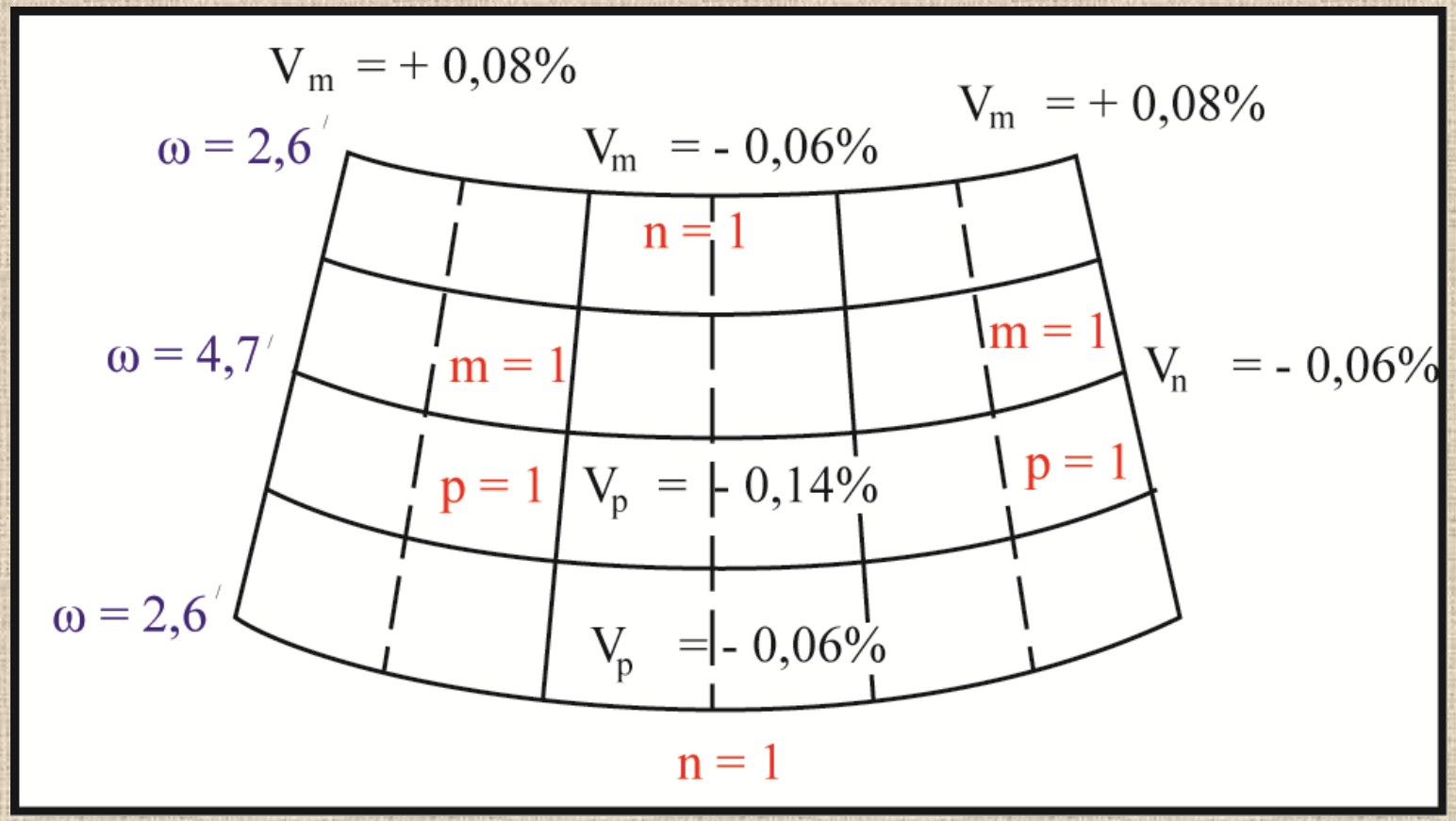
Laisvosios kartografinės projekcijos.

Naujos laisvosios kartografinės projekcijos gaunamos transformuojant anksčiau sukurtas. Keičiama projekcijų išvaizda, deformacijų pobūdis viena ar dviem kryptimis, kombinuojamos ar aproksimuojamos projekcijas apibūdinančios lygtys, analitiškai pertvarkomos projekcijų lygtys bei pakeitimai.

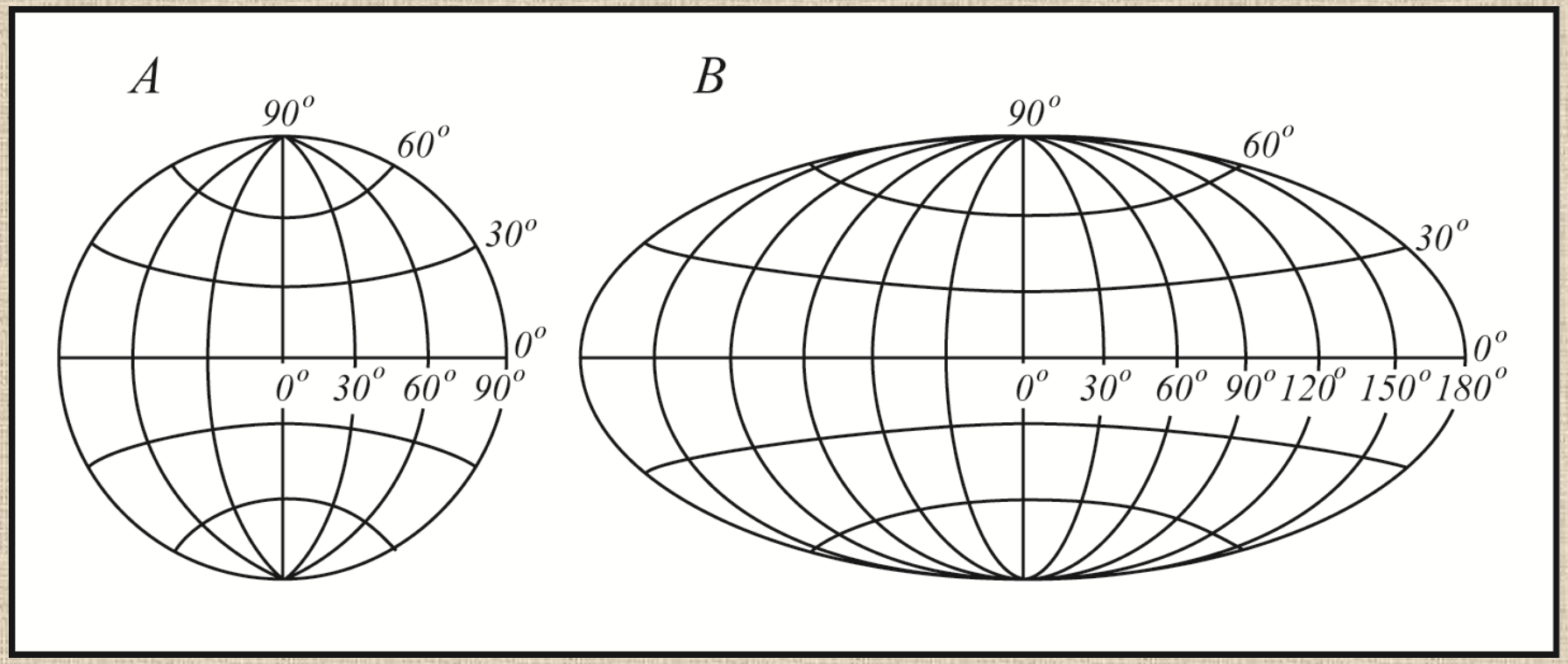
***Laisvąja kartografine projekcija vadinama projekcija, kuri gaunama transformavus vieną ar kelias jau sukurtas projekcijas*.**

Tokių pakeitimo pavyzdžių yra daug. Pakeitus paprastą polikonusinę projekcija buvo sukurta Tarptautinio pasaulio žemėlapio M 1:1 000 000 projekcija. Paprastoje polikonusinėje projekcija vidurinis meridianas yra tiesė, kuri naujajame žemėlapyje pateikiamas be iškraipymų, likę meridianai yra kreivės, paralelės – apskritimų lankai, kurie taip pat pateikiami be iškraipymų. Pakeistoje projekcijoje visi meridianai ištiesinami. Neiškraipomas tik dviejų meridianų vaizdas. Tie meridianai 60 ° platumoje yra nutolę ± 2° nuo vidurinio meridiano; 60° - 76° platumoje nutolę ± 4° ir šiauriau ar piečiau 76° platumoje nutolę ±8°. Kiekviename šio žemėlapio lape be iškraipymų pateiktos tik dvi paralelės – pietinė ir šiaurinė, ribojančios lapo vaizdą. Kitų vietų iškraipymai pateikti 83 paveikslas.

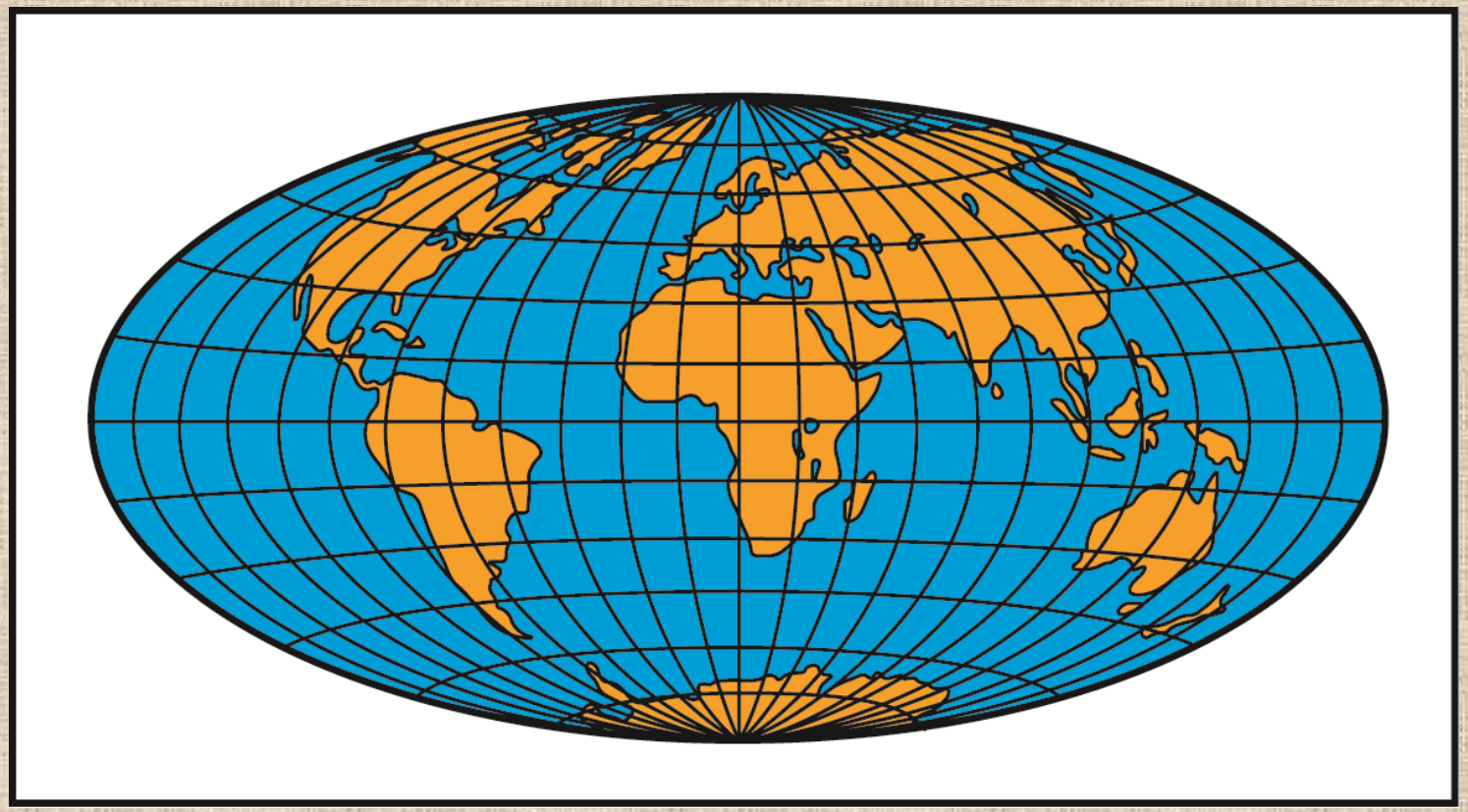
Deformuojant pirminio žemėlapio kartografinę projekciją galima sukurti naują projekciją. 1889 metais D. Aitovas (1854 – 1933) ištempė į du kartus ilgesnį atstumą ties ekvatoriumi lygiatarpę skersinę azimutinę pusrutulių projekciją, paversdamas ją integralia pasaulio žemėlapio projekcija (84 pav.).



Tarptautinio 1:1 000 000 mastelio žemėlapio kartografinis tinklas su iškraipymo rodikliais: ω – maksimalus kampo iškraipymas; m, n – daliniai žemėlapio masteliai meridiano (m), paralelės (n) kryptimis, p – dalinis plotų mastelis; Vm, Vn, ir Vp – atitinkamos iškraipymo reikšmės.



Laisvųjų projekcijų kūrimas Aitovo metodu: A – pirminė skersinė azimutinė projekcijs, B –išvestinė laivoji projekcija.



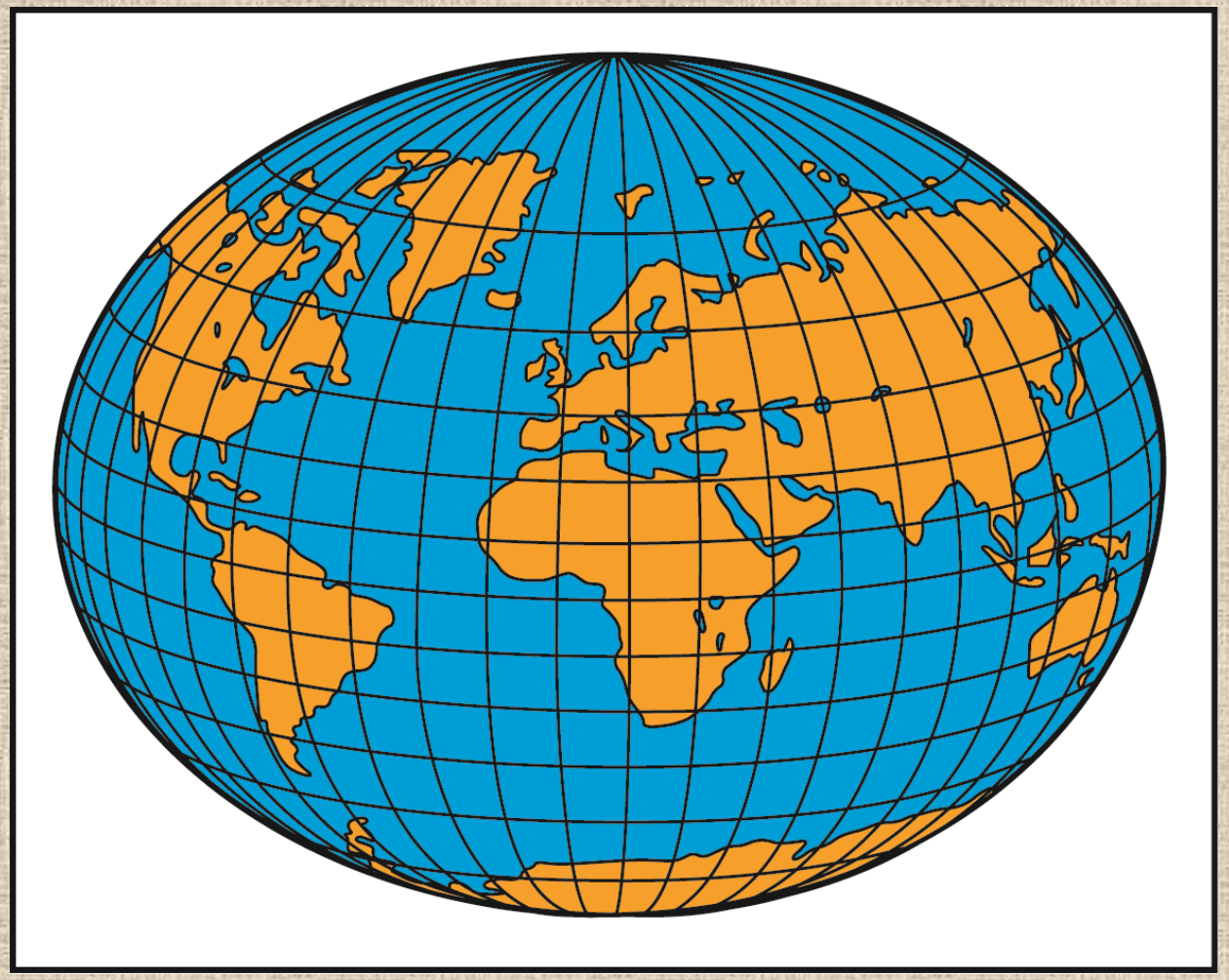
Laisvoji lygiaplote Aitovo – Gamerio projekcija.

1892 metais E.Hameris (N.N.E.Hammer, 1858 – 1925) panaudojo tokį būdą lygiaplotei skersinei azimutinei projekcijai, sukurdamas lygiaplotę pasaulio žemėlapio projekciją (85 pav.).

86 paveiksle pateikta modifikuota Gilberto „Dviejų pasaulių“ projekcija, kuri ištempta ekvatoriaus (ordinačių) kryptimi. Ištempimas siekia 1,25 karto.

1953 metais Brizmeisteris sukūrė lygiaplotę skersinę projekciją, kuri sukurta lygiaplotės azimutinės projekcijos pagrindu. Šioje projekcijoje sąlyginio poliaus koordinatės buvo lygios: $\varphi = 45°$, $\lambda = -170°$. Tokiu būdu sąlyginis polius atsidūrė už geografinio poliaus. Dėl šios priežasties projekcijoje šiaurės polius virtęs vienu tašku, o pietų polius – dviem taškais. Palyginus Brizmeisterio projekciją su pirmine azimutine projekcija matyti, kad šios projekcijos ordinatės (Y ašis – ekvatorius) padidintos 1,8708 karto, o abcisės (X ašis – vidurinysis meridianas) – 1,0690 karto. Taip buvo sukurta gana originali projekcija (17 ir 87 paveikslai).

Vokiečių kartografai K.Ziemonas (K.Siemon) ir K.Vagneris (K.Vagner) pasiūlė transformacijai naudoti nevisą pradinę projekciją, o tik jos dalį. Dažniausiai kaip tinkamiausia naudojama centrinė projekcijos dalis, kurią, panaudojant įvairius koeficientus tampo ekvatoriaus ir vidurinio meridiano kryptimis. Paralelių ir meridianų linijas naujajame kartografiniame tinkle naujai įskaitmenima. Šiuo metodu sudaromų projekcijų schema pateikta 88 paveiksle. Šiuo metodu sukurta nemažai kartografinių projekcijų, naudojamų Vokietijos ir kitų šalių nacionaliniuose atlasuose.

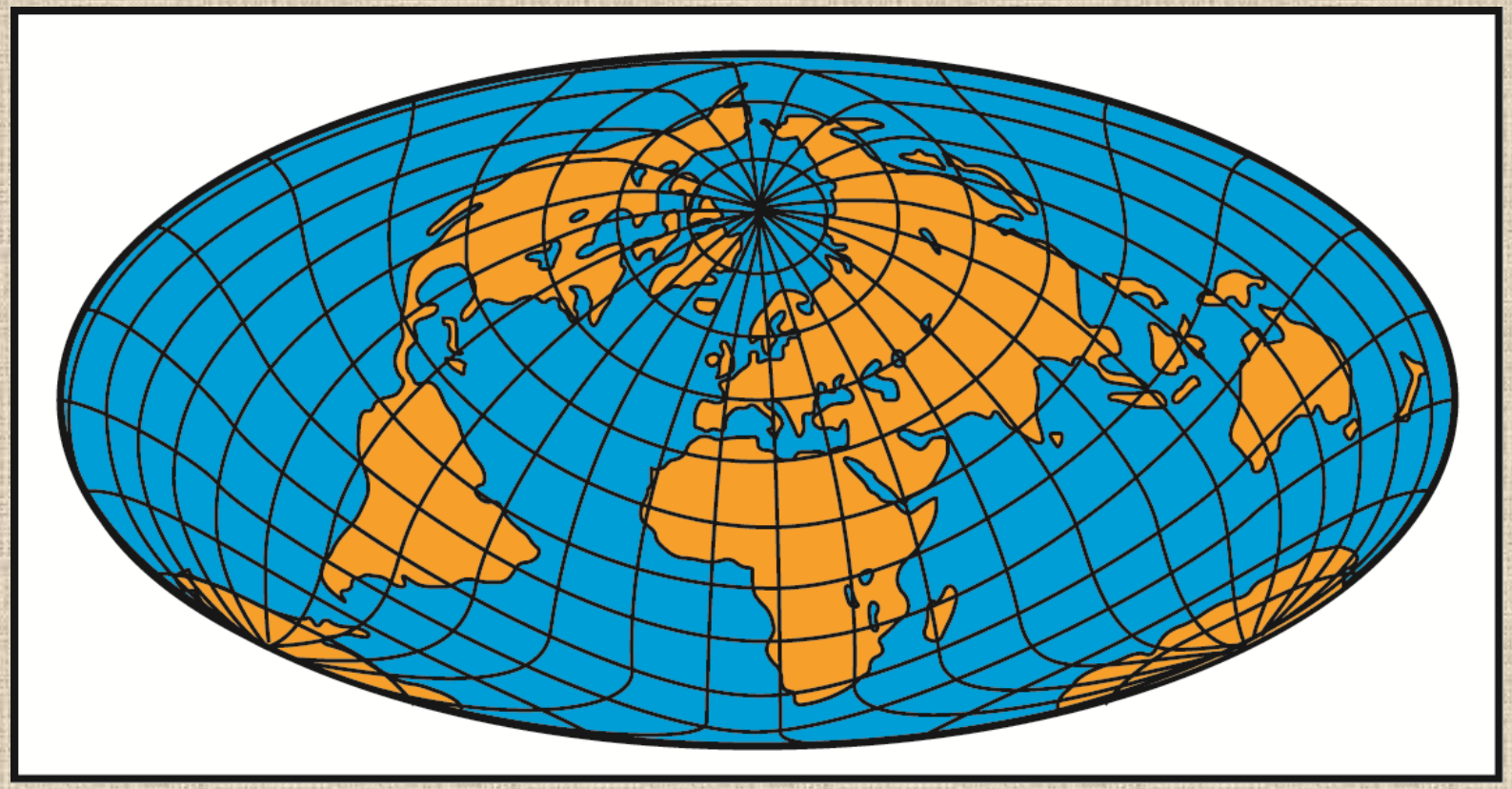


Įstriža modifikuota Gilberto „Dviejų pasaulių“ projekcija. Sąlyginio poliaus koordinatės: φ_0 = + 17 °; λ_0 = + 11°.

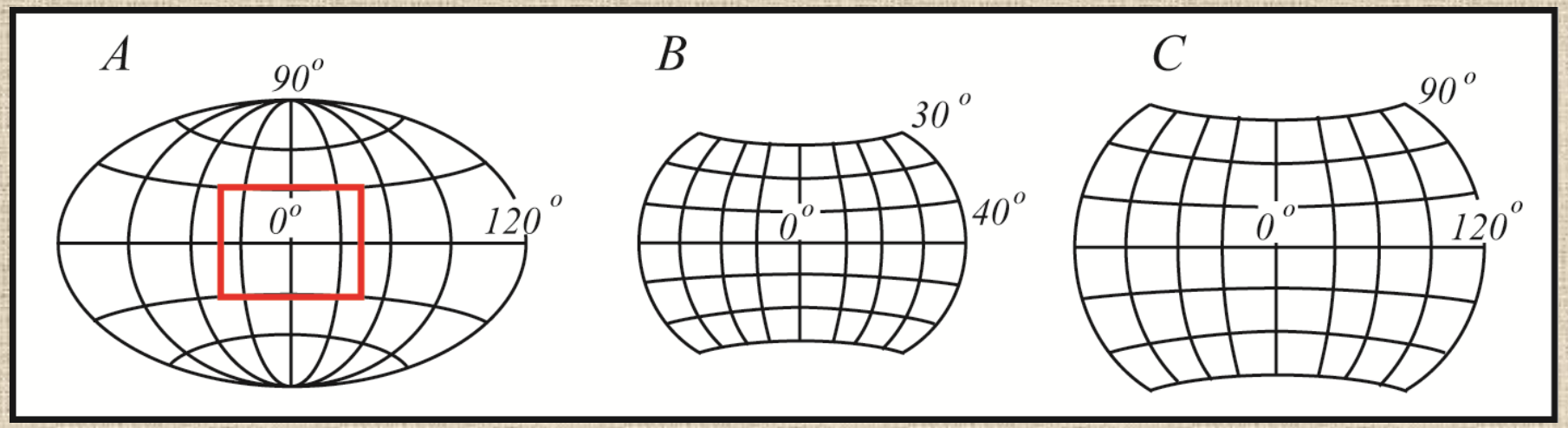
Vakarų kartografai, sudarinėdami globalius žemėlapius dažnai naudoja vokiečio O.Vinkelio (O.Vinkel, 1873 – 1953) 1921 metais sukurtą projekciją. Šios projekcijos lygtys sudarytos suvidurkinant dviejų projekcijų, Aitovo ir lygiatarpės cilindrinės, abscisių ir ordinačių formules. Cilindrinės projekcijos pagrindinė platuma buvo vedama ± 40° (89 pav.). Tokiu būdu laisvoji Aitovo projekcija tapo pradine kuriant naują Vinkelio projekciją.

Tais atvejais, kai žemėlapiuose būtina kartografuoti ekvatorines, vidutines poliarines platumas, tarpusavyje derinamos cilindrinės ir pseudoazimutinės projekcijos. Įstrižoje pseudoazimutinėje projekcijoje poliarinės sritys kartografuojamos perspektyviniu vaizdu. 90 paveiksle pateikta projekcija, kurios mazginių taškų koordinatės yra vidutinės normalios cilindrinės Merkatoriaus ir skersinės pseudoazimutinės koordinačių reikšmės. Šioje projekcijoje almukantaratai yra ne apskritimai, o elipsės. Elipsių vertikalios pusašės sutapatintos su vidurinio meridiano kryptimi, o horizontalios – su ekvatoriaus. Vertikalios almukantaratų elipsių pusašės atitinka lygiatarpės projekcijos pusašių kryptis, o horizontalios laisvosios projekcijos, pasižyminčios tarpinio varianto tarp lygiatarpių ir lygiapločių projekcijų savybėmis. Kuriant tokias projekcijas labai svarbu parinkti tinkamą balansą tarp vienos ir antros kartografinių projekcijų koordinačių reikšmių. Naujos projekcijos koordinatės turi būti tokios, kad ties poliais nesijustų Merkatoriaus projekcijos įtakos, o ekvatoriuje – pseudoazimutinės projekcijos įtakos. Tarpe tarp ekvatoriau ir polių privalo būti nuoseklus perėjimas iš vienos projekcijos į kitą.

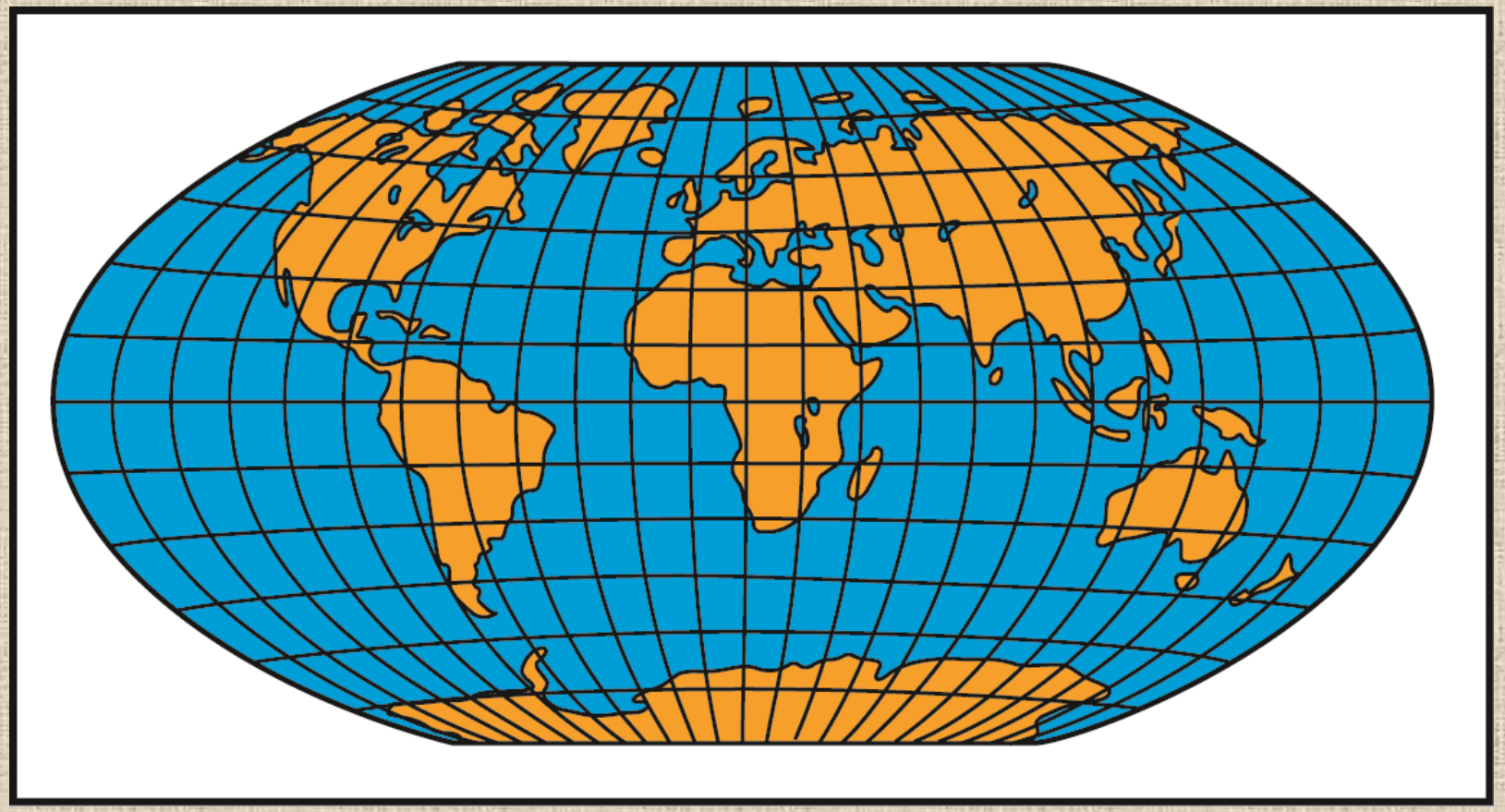
Papildomų parametrų pridėjimas. Šio metodo esmė – papildomų rodiklių pridėjimas prie jau esamų kartogarfinių projekcijų parametrų. Buvusios TSRS Centriniame geodezijos, aeronuotraukos ir kartografijos mokslo tyrimo institute (CGAKMTI) taikant tokį metodą buvo sukurtos įvairios pseudocilindrinės ir pseudokūginės projekcijos.



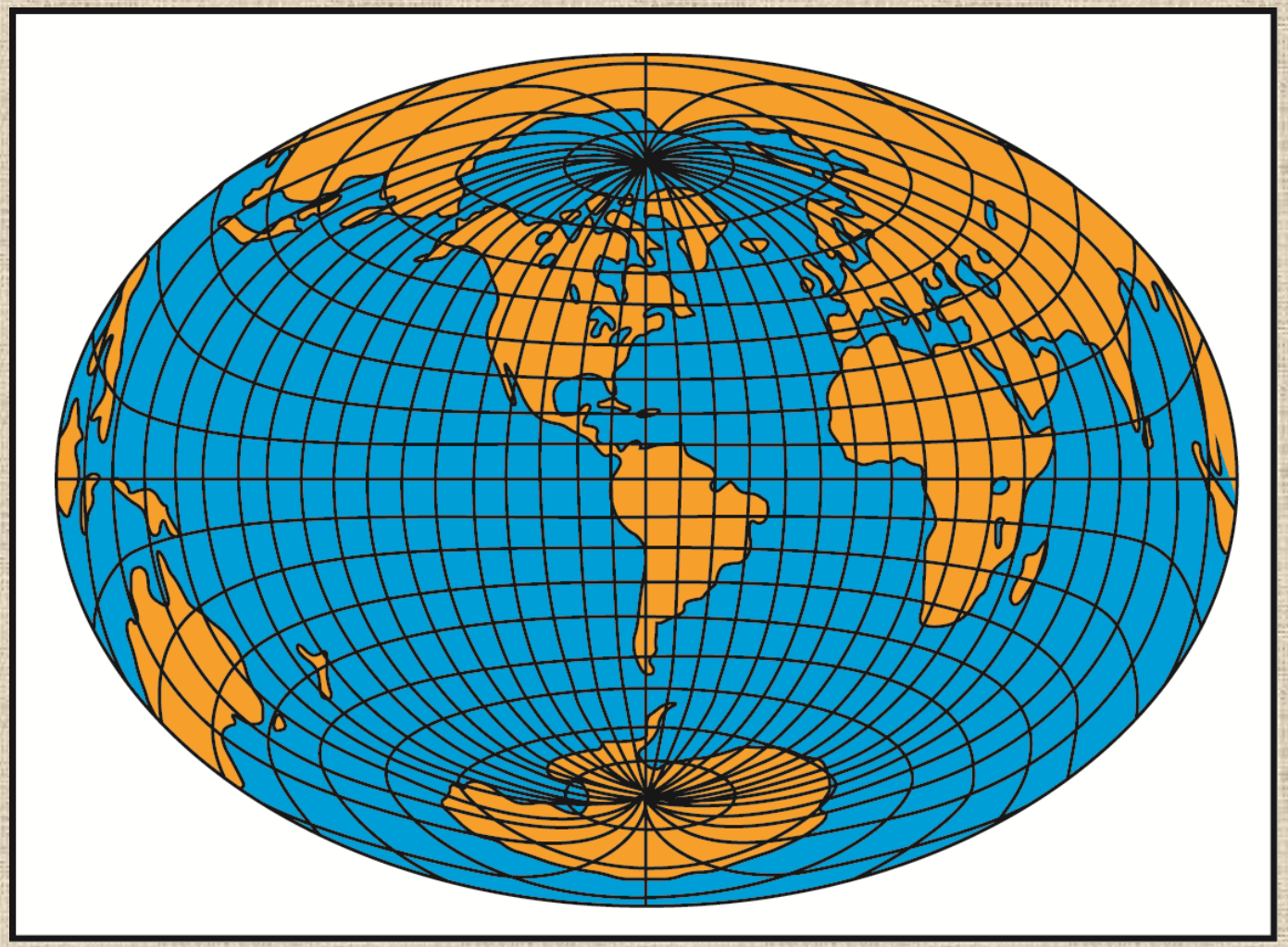
Laisvoji lygiaplotė Brizmeisterio projekcija.



Laisvųjų projekcijų kūrimo schema, keičiant dalį pirminio kartografinio tinklo: A – norimo kartografuoti ploto išskyrimas, B – kartografinio tinklo sutankinimas, C – kartografinio tinklo reikšmių pakeitimas.



Laisvojii (išvestinė) Vinkelio projekcija



Projekcija, sukurta iš normalios cilindrinės Merkatoriaus ir skersinės pseudoazimutinės projekcijų

1937 – 1938 metais profesorius M.D.Solovjovas pakeitė pseudokūginę Bono (Bonn) projekciją. Naujosios projekcijos parametrai aprašomi šiomis lygtimis:

$$\rho = C_0 + C_1(S_0 - S); \qquad \delta = C_2 \frac{r}{\rho} \lambda\ ; \qquad x = p - \rho \times cos\delta; \qquad y = \rho \times sin\delta$$

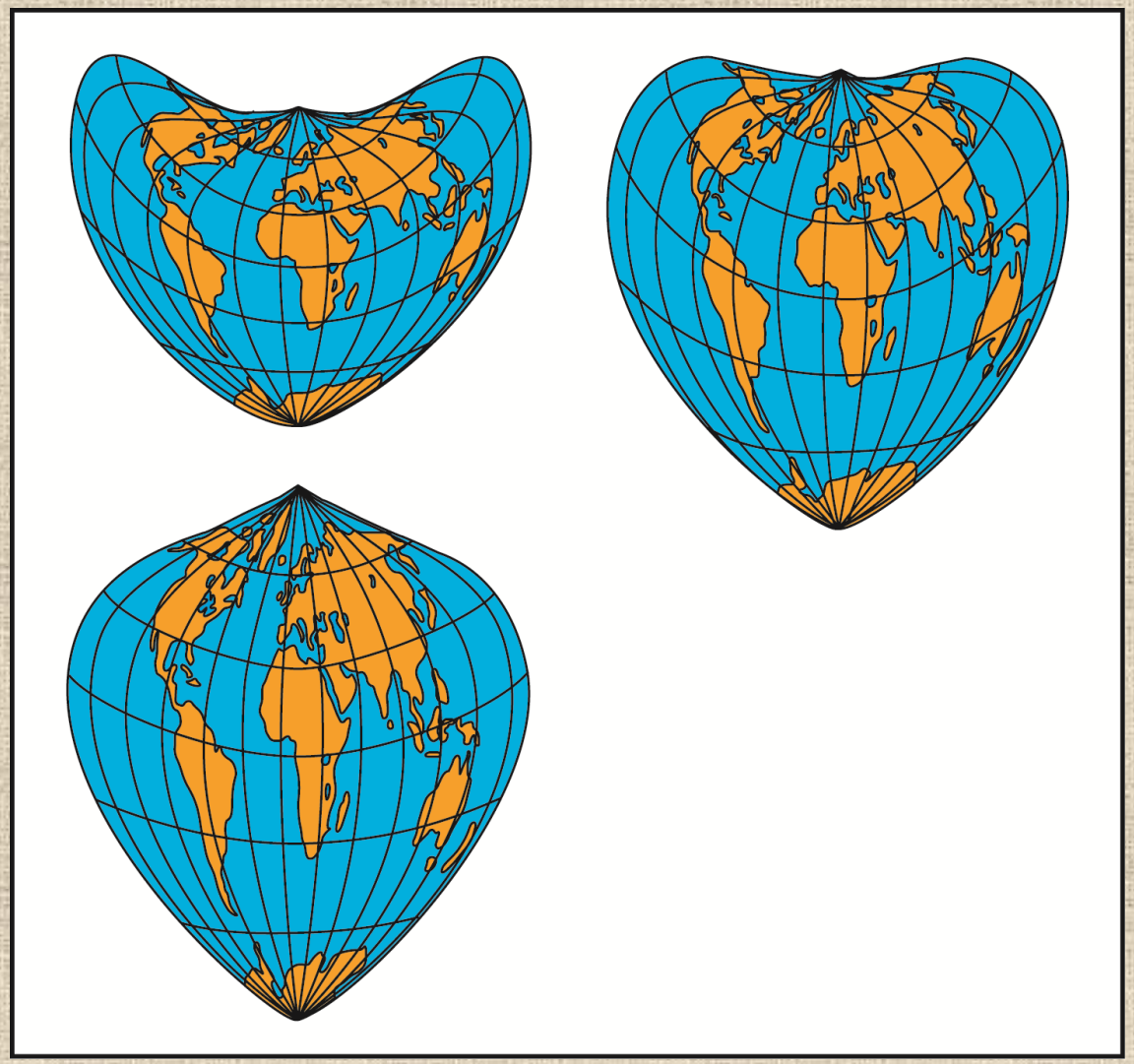
Tokiu būdu projekcijos formulėse išskiriami trys papildomi parametrai – C_0, C_1 ir C_2. Bono projekcijoje šie parametrai buvo išreiškiami lygtimis:

$$C_0 = N_0 \times ctg\varphi_0 \qquad C_1 = C_2 = 1.$$

Solovjovas šiuos parametrus traktavo kaip laisvuosius dydžius. Keičiant šiuos parametrus buvo galima reguliuoti paralelių išlinkimą (kreivumą), taip sukuriant naują kartografinio tinklo vaizdą ir keisti jo savybes. 91 paveiksle parodyta, kaip kinta Bono projekcijos vaizdas keičiant C_1 ir C_2 parametrus.

Kitas pavyzdys, tai laisvosios normalios Milerio projekcijos transformacija. Jos kartografinio tinklo vaizdas pateiktas 92 paveiksle. 1942 metais O.Mileris Merkatoriaus projekciją papildė papildomu parametru d = 0,8. Tuomet projekcijos lygtis tapo:

$$x = \frac{C\left[ln\, tg\left(\frac{\pi}{4} + d\frac{\varphi}{2}\right)\right]}{d}; \qquad y = C\lambda.$$



Kartografinio tinklo vaizdo keitimas įvedant papildomus parametrus: A - Bono projekcija, kurios parametrai $C_1 = C_2 = 1$; B – parametras $C_1 = 1,5$; C – parametras $C_2 = 0,5$.

Kartografinis Milerio projekcijos tinklo vaizdas labai panašus į Merkatoriaus projekcijos. Tačiau Milerio projekcija neturi dalies tų trūkumų, kuriuos turi Merkatoriaus projekcija. Milerio projekcijoje mažesnis plotų iškraipymas, ypač priepoliarinėse srityse. Taip pat tarpai tarp paralelių kinta ne taip greitai, kaip Merkatoriaus projekcijoje. Centrinėje prieekvatorinėje dalyje abi projekcijos iš esmės sutampa. Milerio projekcija plačiai taikoma amerikietiškuose pasaulio atlasuose ir žemėlapiuose.

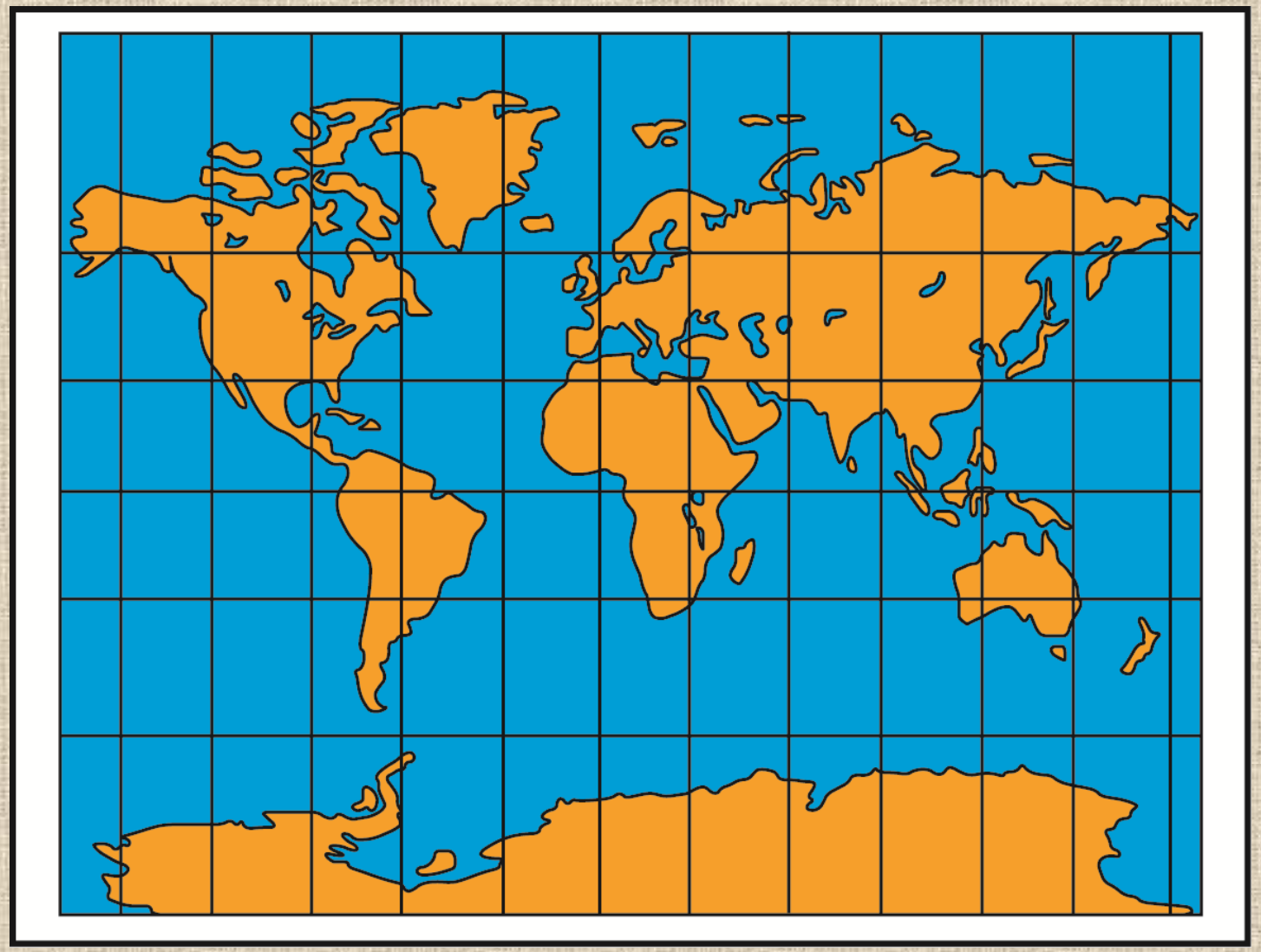
Projekcijų lygčių aproksimacija. Šitas būdas plačiai naudojamas kuriant laisvasias azimutines projekcijas. Šio metodo esmė – naudojamos kartografinių projekcijų lygtys, kurių konkretūs rodikliai ir jų parametrai yra grupuojami, įvardijami kaip jungtiniai rodikliai, kurių skaitmeninės dalys gali būti keičiamos. Tokiu būdu galima kurti skirtingomis savybėmis pasižyminčiais kartografines projekcijas. Keletas tokių projekcijų pavyzdžių.

1936 metais G.A. Ginzburgas sukūrė apibendrintą formulę projekcijų almukantaratų spinduliams ρ skaičiuoti. Ji apima formules, skirtas lygiapločių ir lygiakampių azimutinių projekcijų spindulių skaičiavimui. Jungtinėje formulėje skaitmeniniai parametrų rodikliai pakeičiami raidiniais simboliais:

$$\rho = R\left(L_1 \times sin\frac{Z}{k_1} + L_2 \times tg\frac{Z}{k_2}\right)$$

Kai $L_2 = 0$, o $L_1 = k_1 = k$ gaunama apibendrinta (aproksimuota) „sinusinės atšakos“ formulė:

$$\rho = Rk \times sin\frac{Z}{k}$$



Laisvosios (išvestinės) cilindrinės Milerio projekcijos kartografinis tinklas

Kai k = 2 projekcija tampa lygiaplote azimutine, kai k = 1 projekcija tampa ortografine. Kai rodiklis yra intervale 2,7 – 3,0 sukuriama projekcija su nedideliu plotų iškraipymu. Tokia projekcija tinka atskirų žemynų kartografavimui. Kai rodiklio k reikšmės yra intervale 1,2 – 1,5, projekcija įgyja sferiškumo savybių, kas svarbu vaizduojant visa Žemės rutulį.

Kai $L_1 = 0$, $L_2 = k_2 = k$, gaunama apibendrinta (aproksimuota) „tangentinės atšakos“ formulė:

$$\rho = Rk \times tg\frac{Z}{k}$$

Kai k = 2 projekcija tampa lygiakampe azimutine (stereografine), o kai k = 1 – gnomonine.

Tokiu būdu aproksimuota formulė, esant įvairiems parametrams, leidžia sukurti daugelį naudojamų azimutinių projekcijų bei jų tarpinius variantus.

G.A.Ginzburgas azimutinėmis projekcijoms yra sukūręs ir kitokio pobūdžio formules, kuriose plotai iškraipomi labai nežymiai. Plotų iškraipymas tampa akivaizdesnis esant dideliems zenitiniams nuotoliams:

$$\rho = 2R \times sin\frac{Z}{2} + a \times R \times Z^q$$

Kur q – atitinkamas rodiklis.

Apibendrintą (aproksimuotą) azimutinių projekcijų formulę yra sukūręs A.K.Malovička 1947 metais. Ji atrodo taip:

$$\rho = R\left(2sin\frac{Z}{2}\right)^k\left(2tg\frac{Z}{2}\right)^{1-k}$$

Kai koeficientas *k* = 0,5 gaunama Breizingo (Breusing, 1818 – 1892) projekcija, kurioje spindulio ilgis yra vidutinis geometrinis dydis, išvestas iš lygiaplotės ir lygiakampės projekcijų. Breizingo projekcija, pagal iškraipymo pobūdį yra tarpinis variantas tarp lygiatarpės ir lygiakampės projekcijos.

Labiausiai apibendrintą aproksimuotų azimutinių projekcijų lygčių variantą yra sukūręs L.M.Bugajevskis:

$$\rho = \frac{1}{k} R \left[L_1 \left(sin \frac{Z}{k_1} \right)^{C_1} + L_2 \left(tg \frac{Z}{k_2} \right)^{C_1} + L_3 \times sinZ + L_4 \times Z + L_5 \times tgZ \right]$$

Apsoksimuotos lygtys kuriamos taip pat cilindrinėms, kūginėms ir kitokioms projekcijoms.

Analitiškai pertvarkomos projekcijų lygtys bei pakeitimai. Vienas iš tokių pertvarkymo pavyzdžių N.A.Urmajevo sukurtos lygtys:

$$x' = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{c_1 x + c_2 y + c_3}; \; y' = \frac{b_1 x + b_2 y + b_3}{c_1 x + c_2 y + c_3}$$

Kur *x, y, x′ y′* - ortogonalinės taškų koordinatės pradinėje ir išvestinėje projekcijose; *a,b,c* – transformacijos koeficientai, nustatomi remiantis iškeltomis sąlygomis.

Realių paviršių kartografinės projekcijos.

Pastaraisiais dešimtmečiais pradėto kurti kartografinės projekcijos, skirtos labai sudėtingos formos kosminių kūnų paviršiaus kartografavimui: asteroidų, kometų, meteorų. Šių sudėtingos formos kūnų paviršiaus apsroksimacijos rutulio ar elipsoido pagrindu yra neįmanomos.

Realių kūnų paviršių projekcijos yra kuriamos jau esamų projekcijų pagrindu. Į sudėtingo kūno modelį įkeliama taisyklinga geometrinė figūra. Dažniausiai tai yra sfera, kurios spindulys *R*. Visos šiai sferai sukurtos kartografinės projekcijos gali būti panaudotos sudėtingam paviršiui kartografuoti. Daromi pirminių projekcijų pakeitimai, kur atsižvelgiama į realų aukštį h, esantį virš pagalbinio paviršiaus. Taip sukuriama *kintamo spindulio projekcija*. Taikant tradicinius metodus visi sferos paviršiaus taškai turi vienodą aukštį (sferos spindulys yra pastovus), tai sudėtingam paviršiui, kur atsižvelgiama į aukštį *h*, kiekvienam taškui fiksuojamas individualus spindulys - *R* + *h*. Todėl gali būti panaudota sferą aprašanti lygtis, kur vietoje spindulio *R* naudojamas spindulys *R* + *h*. Cilindrinėje lygiatarpėje meridianų kryptimi projekcijoje po transformacijų taškų padėtis nustatoma naudojant formules:

$$x = (R + h) \times \varphi; \qquad y = (R + h) \times \lambda.$$

Analogiškai gali būti pakeistos ir kitų projekcijų formulės. Pavyzdžiui, pseudocilindrinei elipsinei Kavraiskio projekcijai naudojamos tokios formulės:

$$x = (R + h) \times \varphi; \qquad y = \frac{3}{2\sqrt{3}}(R + h) \times cos\left(arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\varphi\right)\right) \times \lambda$$

Šios projekcijos yra svarbios santykinai nedidelių kūnų, kuriuose žymūs aukščio skirtumai, kartografavimui. Esant tankiam kartografiniam tinklui, kosminio kūno formos netaisyklingumai, o kartu ir realūs paviršiaus nelygumai tampa aiškūs ir vaizdūs.

Kartografinių projekcijų savybių analizė.

Tiesioginiai kartografinių projekcijų sudarymo būdai remiasi nuostata, kad pradžioje sukuriamos projekciją aprašančios lygtys, o po seka jų savybių analizė. Tam tikslui naudojama patogi matematinė metodika – dalinės atitinkamų matematinių funkcijų išvestinės bei Gauso koeficientai. Žemiau pateikiamas atskirų kartografinių projekcijų grupių būtinų formulių sąrašas, kurių pagalba skaičiuojami Gauso koeficientai bei analizuojamas iškraipymų pobūdis ir dydžiai. Pagrindines kartografinių projekcijų savybes, jų klases galima išreikšti per pateikiamų formulių palyginimą su bendraisiais projekcijas aprašančių formulių variantais.

1. Cilindrinių projekcijų grupės lygtys:

$$x = x(B,L); \quad y = y(B,L); \quad e = x_B^2 + y_B^2; \quad g = x_L^2 + y_L^2; \quad f = x_B x_L + y_B y_L; \quad h = x_B y_L - x_L y_B$$

2. Kūginių ir azimutinių projekcijų lygtys:

$$x = d - \rho \times cos\delta; \quad y = \rho \times sin\delta; \quad e = d_B^2 + \rho_B^2 + \rho^2\delta_B^2 + 2d_B(\rho\delta_B \sin\delta - \rho_B cos\delta); \quad g = \rho_L^2 + \rho^2\delta_L^2;$$

$$f = \rho_L(\rho_B - d_B \times cos\delta) + \rho\delta_L(\rho\delta_B + d_B \times sin\delta); \quad h = \rho_L(\rho\delta_B + d_B \times cos\delta) - \rho\delta_L(\rho_B - d_B \times cos\delta);$$

Paralelių ir meridianų skaičiavimo lygtys:

$$B = B(x,y); \quad L = L(x,y); \quad x_B = hL_y; \quad y_B = -hL_x; \quad x_L = -hB_y; \quad y_L = hb_x; \quad h = \frac{1}{(B_x L_y - B_y L_x)}$$

Gauso koeficientų reikšmės sukimosi elipsoidui ir rutuliui, o taip pat, reikalingos iškraipymo rodiklių skaičiavimui pateikti 9 lentelėje (3 skyrius). 9 lentelėje pateiktas pagrindinių kartografinių projekcijų bendrųjų lygčių sąvadas, kartu nurodant, kokios dalinės išvestinės konkrečiu atveju lygios 0. Naudojant rutulį meridiano kreivumo spindulys *M* keičiamas rutulio spinduliu *R*. Paralelių spinduliai *r* taip pat skaičiuojami rutuliui. Tai lemia, kad išvestinis rodiklis B (elipsoido platuma) keičiami rodikliu φ (rutulio platuma), o rodiklis *L* (elipsoido ilguma) – rodikliu λ (rutulio ilguma). Pereinant nuo sferinių geografinių koordinačių φ ir λ į sferines polines koordinates *Z* ir *a*, daroma prielaida, kad $\varphi_z = \lambda_a = -1$. Kitaip tariant, norint rasti išvestines funkcijas per zenitinį nuotolį *Z* arba azimutą *a*, būtina atitinkamas platumos φ ir ilgumos λ išvestines padauginti iš koeficiento – 1. Pavyzdžiui, $\rho_z = \rho_\varphi$.

Būtina atminti, kad perėjus į polines koordinates (*Z*, *a*) analizuojamas ne paralelių ir meridianų kartografinis tinklas, o almukantaratų ir vertikalų linijos (sąlyginės paralelės ir meridianai). Įprastai daliniai vertikalų masteliai išreiškiami per dydį μ_1, almukantaratų – per μ_2. Dėl šios priežasties pereinant į polines koordinates aukščiau pateiktose formulėse dalinių mastelių reikšmes m būtina pakeisti dydžiu μ_1, o n – į μ_2.

9 lentelė. Kartografinių projekcijų bendrųjų lygčių sąvadas.

Klasės	Projekcijų klasių grupės		
	Azimutinės	Kūginės	Cilindrinės
Pastovaus kreivumo paralelės			
Bazinė	$d = const.;\ \rho = \rho(B);\ \delta = \delta(L);\quad d_B = \rho_L = \rho_B = 0$		$x = x(B);\ y = y(L);$ $x_L = y_B = 0$
Pseudoazimutinės, pseudokūginės, pseudocilindrinės	$d = const.;\ \rho = \rho(B);\ \delta = \delta(B,L);$ $d_B = \rho_L = 0$		$x = x(B);$ $y = y(B,L);$ $x_L = 0$
Poliazimutinės, polikūginės, pseudocilindrinės	$d = d(B);\ \rho = \rho(B);\ \delta = \delta(B,L);$ $\rho_L = 0$		
Kintamo kreivumo paralelės			
Poliazimutinės, polikonusinės, policilindrinės	$d = d(B);\ \rho = \rho(B,L);$ $\delta = \delta(B,L)$		$x = x(B,L);$ $y = y(B,L)$

Pateikiama keletas pavyzdžių, kaip tas atliekama.

1 pavyzdys. Nustatyti projekcijos savybes, pagal pateiktą lygtį:

$$x = \int_0^B M \times d \times B; \quad y = C \times L$$

Projekcija aprašyta ortogonalinės koordinačių sistemos lygtimis. Joje abscisės yra platumos funkcija, o ordinatės – ilgumos funkcija. Be to, formulėse yra dydis *M* – sukimosi elipsoido meridiano kreivumo spindulys. Pasinaudojus 9 lentele galima nustatyti, kad tai yra normali cilindrinė sukimosi elipsoido projekcija. Išvestinės, Gauso koeficientai ir iškraipymo rodikliai nustatomi remiantis formulėmis:

$$x_B = M; \quad y_L = C; \quad e = M^2; \quad g = C^2; \quad f = 0; \qquad m = 1; \quad n = \frac{C}{r}; p = n; \quad \varepsilon = 0; \quad tg\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1-n}{2\sqrt{n}};$$

Remiantis šiomis formulėmis galima daryti išvadą, kad tai yra lygiatarpė meridiano kryptimi projekcija. Iškraipymo dydžiai priklausys nuo rodiklio *C*. Kai $C = r_0$, kur r_0 – paralėlės spindulys, dalinis mastelis ties šia paralele bus $n_0 = 1$.

2 pavyzdys. Nustatyti iškraipymo rodiklius normalioje kūginėje elipsoido projekcijoje, kuri aprašyta tokiomis lygtimis:

$$\delta = aL; \quad \rho^2 = \frac{2}{a}\left(C - \int_0^B M \times r \times d \times B\right)$$

$$\rho_B = \frac{M \times r}{a \times \rho}; \quad \delta_L = a; \quad \sqrt{e} = \frac{M \times r}{a \times \rho}; \quad \sqrt{g} = a \times \rho; \quad f = 0; \quad h = M \times r;$$

$$n = \frac{a \times \rho}{r}; \quad m = \frac{1}{n}; \quad p = 1; \quad \varepsilon = 0; \quad tg\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{n^2 - 1}{2n}$$

Tai lygiaplotė projekcija, kadangi jos dalinis ploto mastelis, p = 1. Ilgių ir kampų iškraipymai priklauso nuo a ir C parametrų pasirinkimo. Galima pasirinkti, kad $a = \frac{r_0}{\rho_0}$. **Jis bus lygus elipsoido ir žemėlapio paralelės, kurios *n = 1*, spindulių santykiui.**

3 pavyzdys. Išryškinti įstrižos azimutinės projekcijos savybes, kuri aprašyta tokia formule:

$$\delta = a;\ \rho = 2R \times tg\left(\frac{Z}{2}\right)$$

Įvertinus tai kad projekcijos lygtys pateiktos polinėse koordinatėse, gauname:

$$d_z = \rho_a = \delta_Z = 0;\ \ \delta_a = 1;\quad \rho_Z = \frac{R}{cos^2} \times \left(\frac{Z}{2}\right);\quad \sqrt{e} = \frac{R}{cos^2} \times \left(\frac{Z}{2}\right);$$

$$\sqrt{g} = \rho;\quad f = 0;\quad h = \frac{2R^2 \times tg\left(\frac{Z}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{Z}{2}\right)};$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{cos^2\left(\frac{Z}{2}\right)};\quad \rho = \frac{1}{cos^2\left(\frac{Z}{2}\right)};\quad \varepsilon = 0;\quad \omega = 0$$

Kadangi šioje projekcijoje neiškraipomi kampai (ω = 0), tai pagrindine jos savybe yra lygiakampiškumas.

Pateiktos formulės labai svarbios taikant atvirkštinį matematinės kartografijos būdą projekcijų kūrimui.